ДЕЛУМНО АСОЦИЈАТИВНИ n — ГРУПОИДИ СО НЕУТРАЛНИ ЕЛЕМЕНТИ

Б. Л. ТРПЕНОВСКИ

1. Увод

Нека на множеството M е дефинирана $(n+1)$ — арна алгебарска операција „*". Алгебарската структура што на M ја изградува операцијата „*" ја викаме n — групоид и ја означуваме со $M(*)$, или, просто со M, ако не е потребно посебно да се истакне улогата на операцијата „*". Наместо $* x_0 x_1 \ldots x_n$, односно, $* \ldots x_k x_{k+1} \ldots x_{k+l} \ldots$, ќе пишуваме x_n^o, односно, $\ldots x_{k+l}^k \ldots$; x_{k-1}^k означува пуст симбол, додека x_{k-r}^k за $r > 1$ нема смисол.

За n — групоидот M велиме дека е (i, j) — асоцијативен, $o \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, (види на пр. [1]), ако за секои $x_0, x_1, \ldots x_{2n} \in M$ е:

$$x_{i-1}^o \left(x_{i+n}^i\right) x_{2n}^{i+n+1} = x_{j-1}^o \left(x_{j+n}^j\right) x_{2n}^{j+n+1}. \tag{1.1}$$

Ако M е (i, j) — асоцијативен n — групоид за секои $o \leqslant i < j \leqslant n$, тогаш тој се вика n — полугрупа.

За $e \in M$ велиме дека е неутрален елемент во M, ако за секој $x \in M$ е:

$$xe \ldots e = e\, xe \ldots e = \ldots = e \ldots ex = x, \tag{1.2}$$

а ако е уште и:

$$ex_n^1 = x_1 e\, x_n^2 = \ldots = x_n^1 e, \tag{1.3}$$

за секои $x_1 x_2, \ldots, x_n \in M$, тогаш e се вика централен неутрален елемент во M.

Ако $M(*)$ е (i, j) — асоцијативен n — групоид за некој пар $i \neq j$ и ако во $M(*)$ има барем аден централен неутрален елемент, тогаш $M(*)$ ќе биде n — полугрупа ([1], лема 2.5); во последниов случај, за секои $x_0 x_1, \ldots x_n \in M$, е:

$$* x_0 x_1 \ldots x_n = x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n, \tag{1.4}$$

каде $M(\cdot)$ е полугрупа определена еднозначно до изоморфизам ([1], Теорема).

Дека е овде битна претпоставката да неутралниот елемент од $M(*)$ е централен, покажува следниот

Пример.[1]) Нека $G(\cdot)$ е некомутативна група, а „$*$" $(d+1)$ — арна операција определена со:

$$(1.5) \qquad *\, x_0\, x_1 \ldots x_d = x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{d-1} \cdot x_1^{-1} \cdot \ldots \cdot x_{d-1}^{-1} \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{d-1} \cdot x_d,$$

за секои $x_0\, x_1, \ldots x_d \in G$. Тогаш $G(*)$ е $(o,\, d)$ — асоцијативен d — групоид за кого неутрален елемент е неутралниот елемент од групата $G(\cdot)$. Ако $d > 2$, $G(*)$ не е d — полугрупа.

Во врска со горе изнесеното, природно се поставува прашањето за изучување на (i, j) — асоцијативните n — групоиди во кои постои барем еден неутрален елемент, што е и целта на оваа работа. Се докажува дека е точна следната

Теорема. Нека $M(*)$ е $(i, i+k)$ — асоцијативен n — групид, $k > 0$, и нека d е најголемиот заеднички делител на броевите i, k и n (значи $n = pd$). Ако во $M(*)$ постои барем еден неутрален елемент, тогаш $M(*)$ ќе биде $(rd, (r+s)d)$ — асоцијативен n — групоид, за секои $r = 0, 1, \ldots, s = 1, 2, \ldots, r+s \leqslant p$. Постои $(o,\, d)$ — асоцијативни d — групоид $S(\circ)$, таков да за секои $x_0, x_1, \ldots, x_n \in M$ е:

$$(1.6) \qquad *\, x_0\, x_1 \ldots x_n =$$

$$= \underbrace{\circ(\circ(\ldots\circ(\circ}_{p}\, x_0\, x_1 \ldots x_d)\, x_{d+1} \ldots)\, x_{(p-2)d+1} \ldots x_{(p-1)d})\, x_{(p-1)d+1} \ldots x_{pd}.$$

При докажувањето на нашата теорема ќе ги користиме следните три леми што се докажани во [1]:

Лема 1.1. Нека $i' = n - j$, $j' = n - i$ и нека за секои $x_0, x_1, \ldots, x_n \in M$ е $*\, x_0\, x_1 \ldots x_n = \circ\, x_n\, x_{n-1} \ldots x_1$. Тогаш $M(*)$ е (i, j) — асоцијативен n — групоид ако, и само ако $M(\circ)$ е (i', j') — асоцијативен n — групоид.

Лема 1.2.[2]) Нека M е $(i, i+k)$ — асоцијативен n — групоид. Ако $i \geqslant k$ и ако во M постои барем еден неутрален елемент, тогаш M ќе биде и $(i-k, i)$ — асоцијативен n — групоид.

Лема 1.3. Нека M е $(i, i+k)$ — асоцијативен n — групоид. Ако $n \geqslant i + 2k$ и ако во M постои барем еден неутрален елемент, тогаш M ќе биде и $(i+k, i+2k)$ — асоцијативен n — групоид.

2. Доказ на теоремата

Најпрво ќе докажиме неколку помошни ставови.

Лема 2.1. Ако M е $(i, i+k)$ — асоцијативен n — групоид со неутрален елемент e, тогаш во M ќе бидат точни следните равенства:

---

[1]) Ова е примерот 3. 1. 2 од [1], кој овде го наведуваме поради потполност на работава

[2]) Лемите 1. 2 и 1. 3 се специјални случаи од лемите 2. 2 и 2. 3 од [1].

$$\text{(2.1)}\qquad \underbrace{e\dots e}_{k}\, x^0_{n-k} = x^0_{n-k}\,\underbrace{e\dots e}_{k},$$

$$\text{(2.2)}\qquad \begin{aligned} \underbrace{e\dots e}_{k-i}\, x^0_{n+i-k} &= x^0_{i-1}\,\underbrace{e\dots e}_{k-i}\, x^i_{n+i-k} \\ &= x^0_{2i}\,\underbrace{e\dots e}_{k-i}\, x^{2i+1}_{n+i-k} \\ &= x^0_{n+i-k}\,\underbrace{e\dots e}_{k-i}, \quad k > i. \end{aligned}$$

Доказ. Равенството (2.1) се докажува лесно:

$$\begin{aligned} \underbrace{e\dots e}_{k}\, x^0_{n-k} &= \underbrace{e\dots e}_{i}\Big(\underbrace{e\dots e}_{k}\, x^0_{n-k}\Big)\underbrace{e\dots e}_{n-i} \\ &= \underbrace{e\dots e}_{i+k}\Big(x^0_{n-k}\,\underbrace{e\dots e}_{k}\Big)\underbrace{e\dots e}_{n-i-k} \\ &= x^0_{n-k}\,\underbrace{e\dots e}_{k}. \end{aligned}$$

Од равенствата (2.2), најпрво ќе го докажеме равенството

$$\text{(2.2.1)}\qquad \underbrace{e\dots e}_{k-i}\, x^0_{n+i-k} = x^0_{n+i-k}\,\underbrace{e\dots e}_{k-i}.$$

Бидејќи е:

$$\begin{aligned} \underbrace{e\dots e}_{k-i}\, x^0_{n+i-k} &= \underbrace{e\dots e}_{i}\Big(\underbrace{e\dots e}_{k-i}\, x^0_{n+i-k}\Big)\underbrace{e\dots e}_{n-i} \\ &= \underbrace{e\dots e}_{k}\, x^0_{i-1}\Big(x^i_{n+i-k}\,\underbrace{e\dots e}_{k}\Big)\underbrace{e\dots e}_{n+i-k} \\ \text{—(2.1)—}\qquad &= x^0_{i-1}\Big(x^i_{n+i-k}\,\underbrace{e\dots e}_{k}\Big)\underbrace{e\dots e}_{n-i} = y, \end{aligned}$$

треба да покажиме дека $y = x^0_{n+i-k}\,\underbrace{e\dots e}_{k-i}$.

Ако $n < 2k$, добиваме:

$$\begin{aligned} y &= x^0_{n+i-k}\,\underbrace{e\dots e}_{2k-n-1}\,(e\dots e)\,\underbrace{e\dots e}_{n-i-k} \\ &= x^0_{n+i-k}\,\underbrace{e\dots e}_{k-i}. \end{aligned}$$

Ако пак $2k \leqslant n < 3k$, истото го добиваме на следниот начин:

$$\begin{aligned}
y &= x^0_{i+k-1}\left(x^{i+k}_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{2k}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\ldots e}_{i}\left(x^0_{i+k-1}\left(x^{i+k}_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{2k}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i-k}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i}\\
&= \underbrace{e\ldots e}_{i}\, x^0_{k-1}\left(x^k_{i+k-1}\left(x^{i+k}_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{2k}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\ldots e}_{i}\, x^0_{k-1}\left(x^k_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{3k-n-1}(e\ldots e)\underbrace{e\ldots e}_{n-i-k}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\ldots e}_{i}\, x^0_{k-1}\left(x^k_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{2k-i}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\ldots e}_{i}\left(x^0_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{k-i}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i} = x^0_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{k-i}.
\end{aligned}$$

Од горниот доказ е јасно како ќе се добие доказот на равенството (2.2.1) и во случајот $sk \leqslant n < (s+1)k$, кога $s > 2$.

Ако $n+i > 2k$, тогаш е:

$$\begin{aligned}
x^0_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{k-i} &= \underbrace{e\ldots e}_{i}\left(x^0_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{k-i}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i}\\
&= \underbrace{e\ldots e}_{i}\, x^0_{k-1}\left(x^k_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{2k-i}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i-k}\\
\text{—(2.2.1)—}\qquad &= \underbrace{e\ldots e}_{i}\, x^0_{k-1}\left(\underbrace{e\ldots e}_{k-i}\, x^k_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{k}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\ldots e}_{i}\left(x^0_{k-1}\underbrace{e\ldots e}_{k-i}\, x^k_{n+i-k}\right)\underbrace{e\ldots e}_{n-i}\\
&= x^0_{k-1}\underbrace{e\ldots e}_{k-i}\, x^k_{n+i-k},
\end{aligned}$$

значи:

$$x^0_{n+i-k}\underbrace{e\ldots e}_{k-i} = x^0_{k-1}\underbrace{e\ldots e}_{k-i}\, x^k_{n+i-k}. \tag{2.2 2}$$

Равенството

$$\underbrace{e\ldots e}_{k-i}\, x^0_{n+i-k} = x^0_{i-1}\underbrace{e\ldots e}_{k-i}\, x^i_{n+i-k}, \tag{2.2.3}$$

се добива на следниот начин:

$$x_{i-1}^0 \underbrace{e \dots e}_{k-i} x_{n+i-k}^i = \underbrace{e \dots e}_{i} \left(x_{i-1}^0 \underbrace{e \dots e}_{k-i} x_{n+i-k}^i \right) \underbrace{e \dots e}_{n-i}$$

$$= \underbrace{e \dots e}_{i} x_{i-1}^0 \underbrace{e \dots e}_{k-i} \left(x_{n+i-k}^i \underbrace{e \dots e}_{k} \right) \underbrace{e \dots e}_{n-i-k}$$

$$-(2.1)- \qquad = \underbrace{e \dots e}_{i} x_{i-1}^0 \underbrace{e \dots e}_{k-i} \left(\underbrace{e \dots e}_{k} x_{n+i-k}^i \right) \underbrace{e \dots e}_{n-i-k} = z.$$

Ако $n > 2k$, добиваме дека е:

$$z = \underbrace{e \dots e}_{i} \left(x_{i-1}^0 \underbrace{e \dots e}_{k-i} \underbrace{e \dots e}_{k-i} \underbrace{e \dots e}_{i} x_{n+i-2k}^i \right) x_{n+i-k}^{n+i-2k+1} \underbrace{e \dots e}_{n-i-k}$$

$$-(2.2.2)- \qquad = \underbrace{e \dots e}_{i} \left(x_{i-1}^0 \underbrace{e \dots e}_{k} x_{n+i-2k}^i \underbrace{e \dots e}_{k-i} \right) x_{n+i-k}^{n+i-2k+1} \underbrace{e \dots e}_{n-i-k}$$

$$-(2.2.1)- \qquad = \underbrace{e \dots e}_{i} \left(\underbrace{e \dots e}_{k-i} x_{i-1}^0 \underbrace{e \dots e}_{k} x_{n+i-2k}^i \right) x_{n+i-k}^{n+i-2k+1} \underbrace{e \dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e \dots e}_{k} x_{i-1}^0 \left(\underbrace{e \dots e}_{k} x_{n+i-k}^i \right) \underbrace{e \dots e}_{n-i-k}$$

$$-(2.1)- \qquad = \underbrace{e \dots e}_{k} x_{i-1}^0 \left(x_{n+i-k}^i \underbrace{e \dots e}_{k} \right) \underbrace{e \dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e \dots e}_{i} \left(\underbrace{e \dots e}_{k-i} x_{n+i-k}^0 \right) \underbrace{e \dots e}_{n-i}$$

$$= \underbrace{e \dots e}_{k-i} x_{n+i-k}^0.$$

Ако $n \leqslant 2k$, до истиот резултат идаме на следниот начин:

$$z = \underbrace{e \dots e}_{i} \left(x_{i-1}^0 \underbrace{e \dots e}_{n-i} \right) \underbrace{e \dots e}_{2k-n} x_{n+i-k}^i \underbrace{e \dots e}_{n-i-k}$$

$$-(2.2.1)- \qquad = \underbrace{e \dots e}_{i} \left(\underbrace{e \dots e}_{k-i} x_{i-1}^0 \underbrace{e \dots e}_{n-k} \right) \underbrace{e \dots e}_{2k-n} x_{n+i-k}^i \underbrace{e \dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e \dots e}_{k} x_{i-1}^0 \left(\underbrace{e \dots e}_{k} x_{n+i-k}^i \right) \underbrace{e \dots e}_{n-i-k}$$

$$-(2.1)- \qquad = \underbrace{e \dots e}_{k} x_{i-1}^0 \left(x_{n+i-k}^i \underbrace{e \dots e}_{k} \right) \underbrace{e \dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e \dots e}_{i} \left(\underbrace{e \dots e}_{k-i} x_{n+i-k}^0 \right) \underbrace{e \dots e}_{n-i}$$

$$= \underbrace{e \dots e}_{k-i} x_{n+i-k}^0.$$

За да го завршиме доказот на лемата, ќе покажеме уште дека е:

$$x_{i-1}^{0}\underbrace{e\dots e}_{k-i}x_{n+i-k}^{i}=x_{2i}^{0}\underbrace{e\dots e}_{k-i}x_{n+i-k}^{2i+1}. \tag{2.2.4}$$

Навистина, имаме:

$$\begin{aligned}
x_{2i}^{0}\underbrace{e\dots e}_{k-i}x_{n+i-k}^{2i+1} &= x_{i-1}^{0}(e\dots e\,x_i)\,x_{2i}^{i+1}\underbrace{e\dots e}_{k-i}x_{n+i-k}^{2i+1}\\
&= x_{i-1}^{0}\underbrace{e\dots e}_{k}(\underbrace{e\dots e}_{n-k}x_{2i}^{i}\underbrace{e\dots e}_{k-i})\,x_{n+i-k}^{2i+1}\\
-(2.2.1)- \quad &= x_{i-1}^{0}\underbrace{e\dots e}_{k}(\underbrace{e\dots e}_{n-k}x_{2i}^{i})\,x_{n+i-k}^{2i+1}\\
&= x_{i-1}^{0}(e\dots e)\underbrace{e\dots e}_{k-i-1}x_{n+i-k}^{i}\\
&= x_{i-1}^{0}\underbrace{e\dots e}_{k-i}x_{n+i-k}^{i}.
\end{aligned}$$

Лемата е докажана.

Лема 2. 2. Ако M е $(i, i+k)$—асоцијативен n—групоид, $i<k$, со барем еден неутрален елемент, тогаш во M ќе биде точна секоја од следните делумни асоцијативности:

$$1^\circ.\ (0, i+k);\quad 2^\circ.\ (0, n);\quad 3^\circ.\ (0, k).$$

Доказ. Нека e е неутрален елемент во M. Бидејќи по претпоставка е $i<k$, покрај (2. 1), при докажувањето ќе ги користиме и равенствата (2. 2),

1°.

$$\begin{aligned}
&x_{i+k-1}^{0}(x_{i+k+n}^{i+k})\,x_{2n}^{i+k+n+1}=\\
&=\underbrace{e\dots e}_{i}(x_{i+k-1}^{0}(x_{i+k+n}^{i+k})\,x_{2n}^{i+k+n+1})\underbrace{e\dots e}_{n-i}\\
&=\underbrace{e\dots e}_{i}x_{k-1}^{0}(x_{i+k-1}^{k}(x_{i+k+n}^{i+k})\,x_{2n}^{i+k+n+1}\underbrace{e\dots e}_{k})\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}\\
&=\underbrace{e\dots e}_{i}(\underbrace{e\dots e}_{i}x_{k-1}^{0}(x_{i+k-1}^{k}(x_{i+k+n}^{i+k})\,x_{2n}^{i+k+n+1}\underbrace{e\dots e}_{k})\underbrace{e\dots e}_{n-i-k})\underbrace{e\dots e}_{n-i}\\
&=\underbrace{e\dots e}_{2i}x_{k-i-1}^{0}(x_{k-1}^{k-i}(x_{i+k-1}^{k}(x_{i+k+n}^{i+k})\,x_{2n}^{i+k+n+1}\underbrace{e\dots e}_{k})\underbrace{e\dots e}_{n-i})\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}\\
&=\underbrace{e\dots e}_{2i}x_{k-i-1}^{0}(\underbrace{e\dots e}_{k}x_{k-1}^{k-i}(x_{i+k-1}^{k}(x_{i+k+n}^{i+k})\,x_{2n}^{i+k+n+1}\underbrace{e\dots e}_{k})\underbrace{e\dots e}_{n-i-k})\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{e\dots e}_{2i} x^0_{k-i-1}\big(\underbrace{e\dots e}_{i}\big(\underbrace{e\dots e}_{k-i} x^{k-i}_{i+k-1}\big(x^{i+k}_{i+k+n}\big) x^{i+k+n+1}_{2n}\big)\underbrace{e\dots e)}_{n-i}\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e\dots e}_{2i} x^0_{k-i-1}\big(\underbrace{e\dots e}_{k-i} x^{k-i}_{i+k-1}\big(x^{i+k}_{i+k+u}\big) x^{i+k+n+1}_{2n}\big)\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e\dots e}_{2i} x^0_{k-i-1}\big(x^{k-i}_{k-1}\underbrace{e\dots e}_{k-i} x^{k}_{i+k-1}\big(x^{i+k}_{i+k+n}\big) x^{i+k+n+1}_{2n}\big)\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e\dots e}_{2i} x^0_{k-i-1}\big(x^{k-i}_{k-1}\big(\underbrace{e\dots e}_{k-i} x^{k}_{i+n}\big) x^{i+n+1}_{2n}\big)\underbrace{k\dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e\dots e}_{2i} x^0_{k-i-1}\big(x^{k-i}_{k-1}\big(x^{k}_{i+n}\underbrace{e\dots e}_{k-i}\big) x^{i+n+1}_{2n}\big)\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e\dots e}_{i}\big(\underbrace{e\dots e}_{i} x^0_{k-1}\big(x^{k}_{i+n}\underbrace{e\dots e}_{k-i}\big) x^{i+n+1}_{2n-k}\big) x^{2n-k+1}_{2n}\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e\dots e}_{i}\big(\underbrace{e\dots e}_{i}\big(x^0_{n}\big) x^{n+1}_{i+n}\underbrace{e\dots e}_{k-i} x^{i+n+1}_{2n-k}\big) x^{2n-k+1}_{2n}\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e\dots e}_{i}\big(\underbrace{e\dots e}_{k}\big(x^0_{n}\big) x^{n+1}_{2n-k}\big) x^{2n-k+1}_{2n}\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e\dots e}_{i+k}\big(\big(x^0_{n}\big) x^{n+1}_{2n}\big)\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}$$

$$= \big(x^0_{n}\big) x^{n+1}_{2n}.$$

Докажавме дека M е $(0, i+k)$—асоцијативен n—групоид.

2°. Нека q е природен број таков да е $qk \leqslant n-i < (q+1)k$. Ако на M ја примениме лемата 1.3 q—1 пати, ќе добиеме дека M е (i_1, i_1+k)—асоцијативен n—групоид, каде $i_1+k \leqslant n < i_1+2k$. Ако е $i_1+k=n$, би добиле дека M е $(i+k, n)$—асоцијативен n—групоид, од каде, спрема првиот дел од оваа лема, ќе се добие дека M е и $(0, n)$—асоцијативен n—групоид. Нека е $i_1+k<n$. Ако се земат во предвид лемата 1.1 и доказот на првиот дел од оваа лема, ќе се добие дека M е (i, n)—асоцијативен n—групоид. Со комбинација на трите делумни асоцијативности: (i, n), $(i, i+k)$ и $(0, i+k)$, ќе се добие конечно, и во овој случај, дека M е $(0, n)$—асоцијативен n—групоид.

3°. Докажуваме на крај дека M е $(0, k)$—асоцијативен n—групоид:

$$\big(x^0_{n}\big) x^{n+1}_{2n} = \underbrace{e\dots e}_{i}\big(\big(x^0_{n}\big) x^{n+1}_{2n}\big)\underbrace{e\dots e}_{n-i}$$

$$= \underbrace{e\dots e}_{i}\big(x^0_{n}\big) x^{n+1}_{n+k-1}\big(x^{n+k}_{2n}\underbrace{e\dots e}_{k}\big)\underbrace{e\dots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e \ldots e}_{i} \, x_{k-1}^{0} \left(x_{n+k-1}^{k} \left(x_{2n}^{n+k} \underbrace{e \ldots e}_{k} \right) \right) \underbrace{e \ldots e}_{n-i-k}$$

$$= \underbrace{e \ldots e}_{i} \, x_{k-1}^{0} \left(\left(x_{k+n}^{k} \right) x_{2n}^{k+n+1} \underbrace{e \ldots e}_{k} \right) \underbrace{e \ldots e}_{n-i+k}$$

$$= \underbrace{e \ldots e}_{i} \left(x_{k-1}^{0} \left(x_{k+n}^{k} \right) x_{2n}^{k+n+1} \right) \underbrace{e \ldots e}_{n-i}$$

$$= x_{k-1}^{0} \left(x_{k+n}^{k} \right) x_{2n}^{k+n+1}.$$

Лема 2.3. Нека M е $(i, i+k)$—асоцијативен n—групоид и нека d е најголем заеднички делител од i и k. Ако во M постои барем еден неутрален елемент, тогаш M ке биде и $(0, d)$—асоцијативен n—групоид.

Доказ. Нека $i = pd$ и $k = qd$, каде p и q се релативно прости броеви. Ќе претпоставиме дека $i > 0$, бидејќи за $i = 0$ е $k = d$ и немаме што да докажуваме.

Ако $q = 1$, M ке биде $(pd, (p+1)d)$—асоцијативен n—групоид, па со последователна примена на лемата 1.2 p пати ќе се добие дека M е $(0, d)$—асоцијативен n—групоид. Нека $q > 1$, а $p = 1$. Во овој случај M ќе биде (d, qd)—асоцијативен n—групоид, па, бидејќи е $q > 1$, со примена на лемата 2.2 ќе добиеме дека M е $(0, qd)$ и $(0, (q-1)d)$—асоцијативен n—групоид. Со комбинација на овие две делумни асоцијативности и аналогна постапка како во скучајот $q = 1$, пак ќе добиеме дека M е $(0, d)$—асоцијатирен n—групоид. Заради тоа ќе претпоставиме сега p и q да се поголеми од 1.

Ако $i \geqslant k$, ќе ги избериме природните броеви s и tтакви да е $i = sk + t$ и $t < k$. Во овој случај M ќе биде $(sk + t, (s+1)k + t)$—асоцијативен n—групоид. Ако ја примениме последователно s пати лемата 1.2, ќе добиеме дека M е $(t. t+k)$—асоцијативен n—групоид. Лесно може да се види дека d е најголем заеднички делител за t и k. Ако $i < k$, ќе ставиме $i = t$, за да можиме двата случаи едновремено да ги разгледаме. Така можеме да ставиме дека е:

$$t = rd, \; k = qd, \tag{2.3}$$

каде r и q се релативно прости броеви.

Бидејќи во однос на $(t, t+k)$—асоцијативноста од M се задоволени условите на лемата 2.2, од неа следува дека M е $(0,k)$ и $(0, t+k)$—асоцијативен n—групоид, па со комбинација на овие три делумни асоцијативни, ќе добиеме дека M е и (t, k)—асоцијативен n—групоид. Сега ќе ставиме:

$$k_1 = k - t = (q - r)\, d = q_1 d, \; q_1 = q - r, \tag{2.4}$$

$$i_1 = t - s_1 k_1 = (r - s_1 q_1)\, d = r_1 d, \; r_1 = r - s_1 q_1,$$

каде $s_1 \geqslant 0$ е најголемиот природен број со особината $i_1 \geqslant s_1 k_1$. Очевидно, $q_1 > 0$ и $r_1 \geqslant 0$.

Ако $i_1 = 0$, тогаш е $r_1 = 0$, па имаме да е $r = s_1 q_1$ и $q = (1 + s_1) q_1$. Ова е можно само ако е $q_1 = 1$ (бидејќи за $s_1 = 0$ добиваме $t = 0$, па немаме што да докажуваме) и точноста на лемата се добива исто како во случајат $q = 1$.

Ако $i_1 > 0$, бидејќи M е $(i_1 + s_1 k_1, i_1 + (1 + s_1) k_1)$—асоцијативен n—групоид, со примена на лемата 1.2 $s_1 + 1$ пати, ќе се добие дека M е $(i_1, i_1 + k_1)$—асоцијативен n—групоид, каде, со оглед на изборот на бројот s_1, е $i_1 < k_1$. Од (2.4) е јасно дека $q > q_1$, а лесно се покажува дека d е најголем заеднички делител од i_1 и k_1. Сега можеме повторно да ја примениме лемата 2.2 на $(i_1, i_1 + k_1)$—асоцијативноста од M и да го повториме целиот претходен процес. Применета конечен број пати, горната постапка ќе не доведе до низата природни броеви: $q > q_1 > q_2 > \ldots > q_j = 1$, на која и соответствува низата од природни броеви: $k > k_1 > k_2 > \ldots > k_j = d$ со $k_f = q_f d$, $f = 1, \ldots, j$. Овие низи се такви да за секое $f = 1, \ldots j$, M е $(i_f, i_f + k_f)$—асоцијативен n—групоид, при што е $i_f < k_f$. Така значи имаме и дека M е $(i_j, i_j + d)$—асосијативен n—групоид, од каде, спрема лемата 2.2, добиваме конечно дека M е и $(0, d)$—асоцијативен n—групоид.

Лемата е докажена.

Преди да преминеме на докажување на теоремата, ќе ја докажеме уште и следната

Лема 2.4. Нека $M(*)$ е pd—групоид со барем еден неутрален елемент. Ако за секои $r = 0, 1, \ldots, s = 1, 2, \ldots, r + s \leqslant p$, $M(*)$ е $(rd, (r+s) d)$—асоцијативен pd—групоид, тогаш постои таков $(0,d)$—асоцијативен d—групоид $M(\circ)$ да, за секои $x_0, x_1, \ldots, x_{pd} \in M$, е:

$$(2.5) \qquad * x_0 x_1 \ldots x_{pd} =$$

$$= \underbrace{\circ(\circ(\ldots\circ(\circ}_{p} x_0 x_1 \ldots x_d) x_{d+1} \ldots) x_{(p-2)d+1} \ldots x_{(p-1)d}) x_{(p-1)d+1} \ldots x_{pd}.$$

Доказ. Ако e е неутрален елемент во $M(*)$ и ако за секои $x_0, x_1, \ldots, x_d \in M$ ставиме:

$$(2.6) \qquad \circ x_0 x_1 \ldots x_d = * x_0 x_1 \ldots x_d e \ldots e,$$

тогаш за секои $x_0, x_1, \ldots, x_{2d} \in M$ ќе добиеме дека е:

$$* x_0 x_1 \ldots x_{2d} \underbrace{e \ldots e}_{(p-2)d} = * \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d} (* x_0 x_1 \ldots x_{2d} \underbrace{e \ldots e}_{(p-2)d}) \underbrace{e \ldots e}_{d}$$

$$= * (* \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d} x_0 x_1 \ldots x_d) x_{d+1} \ldots x_{2d} \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d}$$

$$-(2.1)- \qquad = * (* x_0 x_1 \ldots x_d \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d}) x_{d+1} \ldots x_{2d} \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d}$$

$$= \circ(\circ x_0 x_1 \ldots x_d) x_{d+1} \ldots x_{2d}.$$

Ако ја повториме оваа постапка уште $p-2$ пати, ќе ја добиеме точноста на равенството (2.6).

Дека $M(\circ)$ е $(0, d)$—асоцијативен d—групоид, се докажува лесно:

$$\circ(\circ x_0 \ldots x_d)\, x_{d+1} \ldots x_{2d} = *\big(* x_0 \ldots x_d \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d}\big)\, x_{d+1} \ldots x_{2d} \underbrace{e \ldots e}_{(d-1)d}$$

$$-(2.1)- \qquad = *\big(* \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d}\, x_0 \ldots x_d\big)\, x_{d+1} \ldots x_{2d} \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d}$$

$$= * \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d}\, x_0 \ldots x_{d-1} \big(* x_d \ldots x_{2d} \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d}\big)$$

$$-(2.1)- \qquad = * x_0 \ldots x_{d-1} \big(* x_d \ldots x_{2d} \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d}\big) \underbrace{e \ldots e}_{(p-1)d}$$

$$= \circ\, x_0 \ldots x_{d-1} (\circ\, x_d \ldots x_{2d}).$$

Доказ на теоремата. Ако d_1 е најголем заеднички делител за i и k, спрема лемата 2.3 $M(*)$ ќе биде $(0, d_1)$—асоцијативен n—групоид. Бидејќи d го дели d_1, можеме да ставиме $d_1 = k_1 d$. Ќе ги разликуваме следните два случаја:

а) $k_1 = 1$: тогаш $d_1 = d$, т. е. $M(*)$ е $(0, d)$—асоцијативен n—групоид. Доказот на првиот дел од теоремата се добива со повеќеструка примена на лемата 1.3 и со комбинација на така добиените делумни асоцијативности.

б) $k_1 > 1$: нека е:

$$n = v d_1 + t_1, \tag{2.7}$$

каде $t_1 < d_1$ и, очевидно, $v > 0$.

Ако $v > 1$, на $M(*)$ може да се примени лемата 1.3 $v-1$ пати во однос на неговата $(0, d_1)$—асоцијативност. Со тоа ќе се добие дека $M(*)$ е $((v-1)\, d_1, v d_1)$—асоцијативен n—групоид; последната делумна асоцијативност е точна и за $v = 1$ со оглед на $(0, d_1)$—асоцијативност од $M(*)$. Спрема лемата 2.3 $M(*)$ ќе биде и $(0,n)$—асоцијативен n—групоид, па значи и $(v d_1, n)$, односно, $(n-t_1, n)$—асоцијативен n—групоид.

Ако сега го повториме досегашниот доказ на теоремата во однос на $(n-t_1, n)$—асоцијативноста од $M(*)$, ќе добиеме дека $M(*)$ е $(0, d_2)$—асоцијативен n—групоид, каде d_2 е најголем заеднички делител за $n-t_1$ и t_1. Видејќи d го дели и n и t_1, имаме дека е $d_2 = k_2 d$, каде $k_2 < k_1$. Ако $k_2 = 1$, го добиваме случајот а), а ако $k_2 > 1$, ќе ја повториме постапката од б). Со вакводо повторување на горната постапка, може да се определи низата од природни броеви: $k_1 > k_2 > \ldots > k_j = 1$, каде е $d_f = k_f d$, а $M(*)$ е $(0, d_f)$—асоцијативен n—групоид, за секој $f = 1, 2, \ldots, j$. Така се добива дека $M(*)$ е $(0, d)$—асоцијативен n—групоид, а доказот на првиот дел од теоремата се добива со помоќ на лемата 1.3.

За да се добие комплетниот доказ на теоремата, останува само уште да се примени лемата 2.4.

На крајот, нека приметиме дека во случајот $d=1$, или, $d=2$ се добива дека $M(*)$ е n—полугрупа ([1], забелешка 3.2) и во тој случај важи теоремата од [1]. Но ако $d>2$, тогаш, со помош на примерот даден во уводот, може да се конструира пример во кој ќе бидат исполнети сите услови од теоремата и точни сите делумни асоцијативности определени со теоремата, но ниедна друга делумна асоцијативност да не биде исполнета.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Б. Трпеновски и Ѓ. Чупона, Финитарни асоцијативни операции со неутрални елементи, Билтен на ДМФ на НРМ, т. XII, 15–24, Скопје (1961)

B. L. Trpenovski

PARTIAL ASSOCIATIVE n—GROUPOIDS CONTAINING NEUTRAL ELEMENTS

Summary

Let $S(*)$ be an n-groupoid; that is „$*$" is an $(n+1)$-ary operation on the set S. The n-grupoid $S(*)$ is said to be (i, j)-associative if

(1) $$*x_0 \ldots x_{i-1} * x_i \ldots x_{2n} = * x_0 \ldots x_{j-1} * x_j \ldots x_{2n},$$

is an identity in S. An element $e \in S$ is neutral if

(2) $$* x e \ldots e = * e x e \ldots e = \ldots = * e \ldots e x = x,$$

for every $x \in S$.

The main result of this paper is the following

Theorem. Let $S(*)$ be an (i, j)-associative n-groupoid with a neutral element, and let $d=(i, j—i, n)$, If $d|p$ and $d|q$, then $S(*)$ is (p, q)-associative. There is a (o, d)-associative d-gropoid $S(o)$ such that

(3) $$\widetilde{*}\, x_o x_1 \ldots x_{sd} = \underbrace{o \ldots o}_{s} x_o x_1 \ldots x_{sd},\ n = s\, d,$$

for every $x_0, x_1, \ldots, x_{sd} \in S$.

If $d=1$ or $d=2$, then there is a semigroup $S(\cdot)$ such that

(4) $$* x_o x_1 \ldots x_n = x_o \cdot x_1 \ldots \cdot x_n,$$

and therefore $S(*)$ is an n-semigroup (i.e. it is (p,q)-associative for every pair $o \leqslant p < q \leqslant n$).

This theorem is a generalization of the main result of the paper [1].

Example. Let $G(\cdot)$ be a non-abelian group and let

(5) $$o\, x_o\, x_1 \ldots x_d = x_o \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{d-1} \cdot x_1^{-1} \cdot \ldots \cdot x_{d-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot x_{d-1}\, x_d$$

for every $x_o\, x_1, \ldots, x_d \in S$. Then the d-groupoid $G(o)$ is (o, d)-associative, but if $d > 2$ and $(i, j) \neq (o, d)$, it is not $(i\ j)$-associative. Let „$*$" be an $(n+1)$-ary operation defined by

(6) $$* x_o x_1 \ldots x_{sd} = \underbrace{o \ldots o}_{s}\, x_o\, x_1 \ldots x_{sd},$$

where $n = sd$. Then the neutral element of the group is also neutral in the polyadic groupoids $G(o)$ and $G(*)$. The n-groupoid $G(*)$ is (p, q)-associative if and only if $d \mid p$ and $d \mid q$.