

ЗА АСОЦИЈАТИВНИТЕ КОНГРУЕНЦИИ

ГОРГИ ЧУПОНА

Конгруенцијата α од групоидот G велíme дека е *асоцијативна* ако $(xy)z \alpha x(yz)$ за секои $x, y, z \in G$, т. е. ако фактор-групоидот G/α е полугрупа. Овде покажуваме дека постои асоцијативна конгруенција τ таква да конгруенцијата α е асоцијативна ако и само ако во неа се содржи τ (т. е. $x\tau y \Rightarrow x\alpha y$). Спрема тоа, класата асоцијативни конгруенции е *комплејтна подлацица* од латисата на сите конгруенции, а τ е *минималната асоцијативна конгруенција*. Асоцијативните конгруенции ги користиме за покажуваме дека секоја *финишна асоцијативна операција* може да се смета за *производ* во некоја (поширока) полугрупа, а исто така даваме и карактеристика на фамилијата полугрупи со таа особина. На крајот изнесуваме неколку особини на $(f_1 = g_1, \dots, f_k = g_k)$ -конгруенциите во некоја *либарска структура*, од кои (кај групоидите) асоцијативните конгруенции се специјален вид.

1. Да напоменеме прво дека за *конгруенција* во групоидот G ја сметаме секоја *еквивалентност* α во множеството G која е *согласна* со операцијата на групоидот, т. е. $x\alpha y \Rightarrow ax\alpha ay, xa\alpha ya$. Ако x и y се две класи на еквивалентноста α , тогаш производот xy припаѓа на иста класа z , независно од тоа какви се елементите $x \in x$ и $y \in y$. Затоа можеме да ставиме $xy = z$ и така добиваме нов групоид G/α чии елементи се класите на еквивалентноста α . Пресликувањето $x \rightarrow x$ ($x \in x$) е *хомоморфизам* од G на G/α . Обратно, ако постои хомоморфизам $x \rightarrow x'$ од групоидот G на G' , тогаш ставајќи $x\beta y \Leftrightarrow x' = y'$ добиваме конгруенција во G таква да групоидите G/β и G' се изоморфни. Во книгата [2] конгруенциите се наречени *регуларни еквивалентности* ([2], гл. 4).

Нека во групоидот G ја определиме релацијата ω со: $x\omega y \Leftrightarrow$ постојат елементи $a_1, \dots, a_m \in G$ и производи P', P'' такви да $x = P'a_1 \dots a_m$, $y = P''a_1 \dots a_m$; на пример, $x = (a_1 a_2)(a_3 a_4)$, $y = ((a_1 a_2) a_3) a_4$. Потоа нека релацијата τ ја определиме со: $x\tau y \Leftrightarrow$ постојат елементи $x = z_1, \dots, z_k = y$ такви да $z_v \omega z_{v+1}$; велíme дека τ е *транзитивно проширување* на релацијата ω , бидејќи таа е минимална транзитивна релација во која се содржи ω ; со други зборови, ако ρ е друга транзитивна релација таква да $\omega \leq \rho$ (т. е. $x\omega y \Rightarrow x\rho y$) тогаш имаме $\tau \leq \rho$.

Теорема 1. *Релацијата τ е асоцијативна конгруенција во дадениот групоид. Конгруенцијата α е асоцијативна ако и само ако $\tau \leq \alpha$. Спрема тоа, τ е минималната асоцијативна конгруенција.*

Доказ. Да покажеме прво дека τ е конгруенција. Јасно е дека релацијата ω е рефлексивна (оти земаме $a = Pa$) и симетрична, а од тоа следува дека истите особини ги има и τ . Од начинот на определувањето на τ е јасно дека таа е транзитивна, па значи и еквивалентност. Нека $x\omega y$, т. е. $x = P'a_1 \dots a_m$, $y = P''a_1 \dots a_m$. Од тоа следува

$$ux = uP'a_1 \dots a_m = P^*ua_1 \dots a_m, \quad uy = uP''a_1 \dots a_m = P^{**}ua_1 \dots a_m,$$

т. е. $ix\omega iy$. Ако $x = z_1, \dots, z_k = y$ и ако $z_v \omega z_{v+1}$, тогаш имаме $iz_v \omega iz_{v+1}$, т. е. $ix\tau iy$. Слично се добива и $x\tau y$, а од тоа ќе следува дека τ е конгруенција. Јасно е дека $x(yz)\omega (xy)z$, а од тоа следува и $(xy)z\tau x(yz)$, т. е. добиваме дека конгруенцијата τ е асоцијативна.

Нека $x\omega y$ и нека α е некоја асоцијативна конгруенција. Од определувањето на асоцијативните конгруенции следува дека за било кои производи $P'a_1 \dots a_m$, $P''a_1 \dots a_m$ имаме $P'a_1 \dots a_m \alpha P''a_1 \dots a_m$, а од тоа се добива $x\alpha y$, бидејќи секој од елементите x , y е еднаков на по еден производ од тој вид. Имаме значи $\omega \leq \alpha$, а од тоа следува и $\tau \leq \alpha$. Обратно, од $\tau \leq \alpha$ следува $(xy)z\alpha x(yz)$, т. е. дека конгруенцијата α е асоцијативна.

Со тоа точноста на теоремата ја докажавме.

Нека Ω е некое множество конгруенции во групоидот G и нека ставиме: $x\xi y \Leftrightarrow x\varphi y$ за секое $\varphi \in \Omega$; $x\eta y \Leftrightarrow$ постои низа елементи $x = z_1, \dots, z_k = y$ од G и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}$ од Ω такви да $z_v \varphi_v z_{v+1}$. Така добиените релации ξ и η се исто така конгруенции. Поради оваа особина, се вели дека фамилијата конгруенции е комплетна латиса.¹⁾ Од докажаната теорема се гледа дека и асоцијативните конгруенции формираат комплетна латиса, која е подлатиса од латисата на конгруенциите.

Пример. Нека G е комутативна група и нека « $:$ » е операцијата делење во таа група, т. е. $x:y = xy^{-1}$. Минималната асоцијативна конгруенција во квазигрупата $G(:)$ е определена со: $x\tau y \Leftrightarrow xy = z^2$ за некое $z \in G$. Навистина, ако $xy = z^2$ тогаш имаме $x = (e:z^{-1}):(x^{-1}z)$, $y = e:(z^{-1}:(x^{-1}z))$, каде e е неутралниот елемент на групата; од тоа следува дека τ се содржи во секоја асоцијативна конгруенција; дека τ е асоцијативна конгруенција на квазигрупата $G(:)$ се утврдува лесно. Нека R_e^+ е множеството од сите позитивни реални броеви. Поради $xy = (\sqrt{xy})^2$ имаме $x\tau y$ за било кои $x, y \in R_e^+$, т. е. постои само една асоцијативна конгруенција во квазигрупата $R_e^+(:)$. Ако R_a^+ е множеството позитивни рационални броеви, тогаш постојат бесконечно многу асоцијативни конгруенции во квазигрупата $R_a^+(:)$. Фактор-групата $R_a^+/\tau(:)$ е изоморфна со групата на сите бесконечни низи (a_1, \dots, a_n, \dots) каде само конечно многу членови можат да бидат $\neq 1$, а сите преостаната се 1; производот на две низи се определува на вообичаениот начин, т. е.

$$(a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot (b_1, \dots, b_n, \dots) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n, \dots).$$

2. Нека « $*$ » е $(n+1)$ -арна операција во множеството M , т. е. на секоја $(n+1)$ -орка x_0, x_1, \dots, x_n елементи од M ѝ кореспондира еден елемент $*x_0 x_1 \dots x_n$. Во тој случај, веламе дека $M(*)$ е n -групоид. Ако се точни идентитетите

¹⁾ Да се види, на пример [1] стр. 16, или [2] стр. 50.

$$**x_0 \cdots x_{2n} = *x_0 * x_1 \cdots x_{2n} = \cdots = *x_0 \cdots x_{n-1} * x_n \cdots x_{2n},$$

(при што, на пример, наместо $*(x_0 \cdots x_n) x_{n+1} \cdots x_{2n}$ се пишува $**x_0 \cdots x_{2n}$) велеме дека $M(*)$ е n -полугрупа; n -полугрупата $M(*)$ е и n -група ако секоја равенка $*a_0 \cdots a_{i-1} x a_{i+1} \cdots a_n = a_i$ е решлива по x во M . (n -групите се исцрпно изучени во работата [3]). Ако S е полугрупа и ако M е подмножество од S такво да $x_0, \dots, x_n \in M \Rightarrow x_0 \cdot x_1 \cdots x_n \in M$, тогаш ставајќи $*x_0 \cdots x_n = x_0 \cdot x_1 \cdots x_n$ добиваме n -полугрупа $M(*)$ за која велеме дека е n -подполугрупа од S ; n -подполугрупа од S е секоја n -подполугрупа која (како n -полугрупа) е n -група.

За полугрупата S велеме дека е генерирана од n -подполугрупата M ако секој елемент од S е производ на конечен број елементи од M , т. е. ако M е генераторно множество за полугрупата. Јасно е дека ако L и M се две изоморфни n -полугрупи, тогаш на секоја полугрупа генерирана од L ѝ кореспондира една со неа изоморфна полугрупа генерирана од M ; затоа можеме да сметаме дека секоја полугрупа генерирана од L е генерирана и од M . Познато е дека секоја n -група генерира некоја група (да се види, на пример, [3] или [4]), а овде ќе покажеме и дека секоја n -полугрупа генерира некоја полугрупа и уште повеќе, ќе добиеме извесна карактеристика на сите полугрупи што можат да бидат генерирани од дадена n -полугрупа.

Ако K и F се две полугрупи генерирани од n -полугрупата $M(*)$ тогаш е јасно дека постои најмногу еден хомоморфизам од K на F кој на M го индуцира идентичното пресликување; секој хомоморфизам од таков вид ќе го наречеме M -хомоморфизам, а ако таков постои ќе велеме дека K е M -хомоморфна на F . За една генерирана полугрупа од M природно е да речеме дека е максимална ако е M -хомоморфна на секоја друга генерирана полугрупа од M . Обратно, за генерираната полугрупа K од M велеме дека е минимална ако секој M -хомоморфизам од K на некоја генерирана полугрупа од M е и изоморфизам. Јасно е дека две генерирани полугрупи од M што се максимални се изоморфни, но не ни е познато дали важи истото и за минималното генерирање.

Теорема 2. Нека $M(*)$ е n -полугрупа и нека G е множеството од сите k -орки (x_1, \dots, x_k) елементи од M за $k = 1, \dots, n$. Во множеството G определуваме бинарна операција со

$$(x_1, \dots, x_i)(y_1, \dots, y_j) = \begin{cases} (x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_j) & i + j \leq n \\ (*x_1 \cdots x_i y_1 \cdots y_{n-i+1}, \dots, y_j) & \text{за } i + j > n \end{cases}$$

Нека Ω биде множеството од сите асоцијативни конгруенции α на групотој G така да $(x)\alpha(y) \Rightarrow x = y$.

Полугрупата S е генерирана од M ако и само ако е изоморфна со некоја полугрупа од облик G/α , каде $\alpha \in \Omega$. Минималната асоцијативна конгруенција τ (на групотој G) припаѓа на Ω , а G/τ е максималната полугрупа генерирана од M . Секоја полугрупа генерирана од M е M -хомоморфна на некоја минимална полугрупа генерирана од M . Ако $M(*)$ е n -група, тогаш секоја полугрупа што е генерирана од M е група.

Доказ. Нека $\alpha \in \Omega$ и нека со $(x_1, \dots, x_i)_\alpha$ ја означиме класата на еквивалентности α во која се содржи (x_1, \dots, x_i) . При тоа (поради $\alpha \in \Omega$) ќе имаме

$(x)_\alpha = (y)_\alpha \Rightarrow x = y$. Ако ставиме $x \rightarrow (x)_\alpha$ ќе добиеме обратно-еднозначно пресликување од M на $H_\alpha = \{(x)_\alpha; x \in M\}$. Поради

$$*x_0 \cdots x_n \rightarrow (*x_0 \cdots x_n)_\alpha = (x_0)_\alpha \cdots (x_n)_\alpha.$$

H_α е n -подполугрупа од G/α и е изоморфна (како n -полугрупа) со n -полугрупата $M(*)$. Освен тоа, имаме $(x_1, \dots, x_i)_\alpha = (x_1)_\alpha \cdots (x_i)_\alpha$, од што следува дека G/α е генерирана од H_α , па значи и од $M(*)$.

Нека F е некоја полугрупа генерирана од $M(*)$. Секој елемент y од F може да се претстави во облик $y = x_1 \cdots x_s$, каде $x_i \in M$. При тоа може да се претпостави дека $s \leq n$, бидејќи секој производ на $n+1$ елементи од M припаѓа на M . Спрема тоа, ако ставиме $(x) \rightarrow x$ и $(x_1, \dots, x_i) \rightarrow x_1 x_2 \cdots x_i$ добиваме пресликување од G на F . Јасно е дека тоа пресликување е хомоморфизам. Ако ставиме $(x_1, \dots, x_i)_\beta (y_1, \dots, y_j) \Leftrightarrow x_1 \cdots x_i = y_1 \cdots y_j$ ќе добиеме асоцијативна конгруенција β во G таква да полугрупите G/β и F се изоморфни, при што пресликувањето $(x_1, \dots, x_i)_\beta \rightarrow x_1 \cdots x_i$ е изоморфизам. Јасно е дека не може да биде $(x)_\beta (y)$ за $x \neq y$, па значи имаме $\beta \in \Omega$. Со тоа го докажавме првиот дел од теоремата.

Да покажеме сега дека $\tau \in \Omega$. За таа цел, нека напоменеме дека секој елемент (x_1, \dots, x_i) од G може да се претстави како производ на елементите $(x_1), \dots, (x_i)$, па значи $T = \{(x); x \in M\}$ е генераторно множество за груподот G . Со индукција по s , лесно се добива дека ако (y_1, \dots, y_s) е производ на s елементи од T , тогаш имаме $s = qn + r$, каде $0 \leq r < n$. Освен тоа, ако $r=1$ и $y_1 = y$, ќе имаме $(y) = (Pa_1 \cdots a_{qn+1})$, каде $Pa_1 \cdots a_{qn+1}$ е производ на $qn+1$ елементи од M , па значи тој е еднозначно определен од низата a_1, \dots, a_{qn+1} , поради асоцијативноста на операцијата $**$. Од тоа следува дека $(x_1, \dots, x_i) \omega (y_1, \dots, y_j) \Rightarrow i = j$ и $(x) \omega (y) \Rightarrow x = y$, каде ω е релација определена како и во 1. Земајќи го предвид начинот по кој релацијата τ е добиена со помош на ω , заклучуваме дека истите особини ги има и τ , т. е. $(x_1, \dots, x_i) \tau (y_1, \dots, y_j) \Rightarrow i = j$, $(x) \tau (y) \Rightarrow x = y$. Од тоа следува дека $\tau \in \Omega$.

Нека претпоставиме сега дека $\alpha, \beta \in \Omega$ и нека $\alpha \leq \beta$. Ќе покажеме дека $(x_1, \dots, x_i)_\alpha \rightarrow (x_1, \dots, x_i)_\beta$ е M -хомоморфизам од G/α на G/β . Поради $\alpha \leq \beta$ од $(x_1, \dots, x_i)_\alpha (y_1, \dots, y_j)$ следува $(x_1, \dots, x_i)_\beta (y_1, \dots, y_j)$, па значи тоа пресликување е еднозначно, а јасно е дека е и хомоморфизам. Ако ставиме $H_\alpha = \{(x)_\alpha; x \in M\}$, $H_\beta = \{(x)_\beta; x \in M\}$ ќе добиеме две n -подполугрупи од G/α односно G/β , кои се изоморфни со $M(*)$, а при тоа изоморфизам е пресликувањето $(x)_\alpha \rightarrow (x)_\beta$. Затоа можеме да сметаме дека пресликувањето $(x_1, \dots, x_i)_\alpha \rightarrow (x_1, \dots, x_i)_\beta$ е M -хомоморфизам од G/α на G/β .

Сега ќе го комплетираме доказот на вториот дел од теоремата. Ако $\alpha \in \Omega$ имаме $\tau \leq \alpha$, па значи постои M -хомоморфизам од G/τ на G/α , од што (спрема првиот дел на теоремата) се добива дека G/τ е максималната полугрупа генерирана од M .

Нека γ е една максимална конгруенција што припаѓа на Ω (т. е. од $\delta \in \Omega$ и $\gamma \leq \delta$ следува $\gamma = \delta$). Ќе покажеме дека G/γ е минимална полугрупа генерирана од M . Навистина, нека G/γ е M -хомоморфна на полугрупата F , која е генерирана од M . Значи пресликувањето $(x_1, \dots, x_i)_\gamma \rightarrow x_1 \cdots x_i$ е хомоморфизам од G/γ на F . Нека го разгледаме хомоморфизмот $(x_1, \dots, x_i) \rightarrow$

$\rightarrow x_1 \cdots x_i$ од групидот G на F , споменат погоре. Тој може да се претстави како производ на два хомоморфизми $(x_1, \dots, x_i) \rightarrow (x_1, \dots, x_i)_\gamma \rightarrow x_1 \cdots x_i$. Спрема тоа, ако ставиме $(x_1, \dots, x_i) \delta (y_1, \dots, y_j) \Leftrightarrow x_1 \cdots x_i = y_1 \cdots y_j$, добиваме релација δ таква да $(x_1, \dots, x_i)_\delta \rightarrow x_1 \cdots x_i$ е M -изоморфизам од G/δ на F . При тоа, од $(x_1, \dots, x_i)_\gamma (y_1, \dots, y_j)$ следува $x_1 \cdots x_i = y_1 \cdots y_j$, т. е. $(x_1, \dots, x_i) \delta (y_1, \dots, y_j)$, а од тоа и $\gamma \leq \delta$, што поради максималноста на γ е можно само за $\gamma = \delta$. Значи, $(x_1, \dots, x_i)_\gamma \rightarrow x_1 \cdots x_i$ е M -изоморфизам, а од тоа следува дека G/γ е минимално генерирање на M .

Ќе покажеме дека секој елемент $\alpha \in \Omega$ се содржи во некој максимален елемент $\gamma \in \Omega$ (т. е. $\alpha \leq \gamma$), а од тоа ќе следува точноста и на третиот дел од теоремата. Навистина, нека $L = \{\alpha_v; v \in J\}$ е ланец во Ω (т. е. за $\alpha_v \neq \alpha_\lambda$ имаме $\alpha_v < \alpha_\lambda$ или $\alpha_\lambda < \alpha_v$) и нека ставиме $(x_1, \dots, x_i) \beta (y_1, \dots, y_j) \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_i) \alpha_v (y_1, \dots, y_j)$ за некое $\alpha_v \in L$. Јасно е дека β е асоцијативна конгруенција и дека $\beta \in \Omega$. Значи, секој ланец има супремум во Ω , од што спрема добро познатата лема на $Zorn$ (еквивалентна со аксиомата за избор¹⁾) добиваме дека секој елемент α се содржи во некој максимален елемент од Ω , што и сакавме да докажеме.

Нека претпоставиме дека $M(*)$ е n -група и нека $(a_1, \dots, a_i), (b_1, \dots, b_j)$ се дадени елементи од G . Поради решливоста на равенките од облик $* a_0 \cdots a_{i-1} x a_{i+1} \cdots a_n = a_i$, постојат елементи $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k, u_1, \dots, u_{n+j}, \dots, v_1, \dots, v_{n+j}$ такви да

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_i) (x_1, \dots, x_k) &= (u_1) ((u_2) (\dots (u_{n+j}) \dots)) \\ (y_1, \dots, y_k) (a_1, \dots, a_i) &= (v_1) ((v_2) (\dots (v_{n+j}) \dots)) \\ (b_1, \dots, b_j) &= (\dots ((u_1) (u_2)) \dots) (u_{n+j}) \\ &= (\dots ((v_1) (v_2)) \dots) (v_{n+j}), \end{aligned}$$

а од тоа ќе следува $(a_1, \dots, a_i) (x_1, \dots, x_k) \tau (b_1, \dots, b_j) \tau (y_1, \dots, y_k) (a_1, \dots, a_i)$, од што е јасно дека G/τ е група. Ако F е друга полугрупа генерирана од $M(*)$, таа е група бидејќи е хомоморфна слика од група.

Со тоа теоремата е во потполност докажана.

Забелешка. Групидот G е полугрупа само во случај кога M е множество со еден елемент.

3. Ако за секое $*_i \in \Phi$, $A(*_i)$ е n_i -групид велиме дека $A(\Phi)$ е *алибарска сџруктура*. Конгруенција во структурата $A(\Phi)$ е секоја *еквивалентност* на множеството A што е *согласна* со сите операции од Φ . Нека $f_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, f_k(x_1, \dots, x_{m_k}), g_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, g_k(x_1, \dots, x_{m_k})$ се изрази добиени со помош на операциите од Φ (т. е. тие се *полиноми* во структурата $A(\Phi)$). Конгруенцијата α од структурата $A(\Phi)$ велиме дека е $(f_1 = g_1, \dots, f_k = g_k)$ -конгруенција ако $f_i(x_1, \dots, x_{m_i}) \alpha g_i(x_1, \dots, x_{m_i})$ за секои $x_1, \dots, x_{m_i} \in A$, $i = 1, \dots, k$, т. е. ако во *фактор-сџруктурата* A/α (Φ) се точни идентитетите $f_i(x_1, \dots, x_{m_i}) = g_i(x_1, \dots, x_{m_i})$.

Нека релацијата ω е определена со: $x \omega x; x \omega y \Rightarrow y \omega x; x \omega y, * \in \Phi \Rightarrow * x_0 \cdots x_n \omega * y_0 \cdots y_n, f_i(x_1, \dots, x_{m_i}) \omega g_i(x_1, \dots, x_{m_i})$; — и нека τ е *иранзијивно* *проширување* на ω (т. е. τ е определена од ω како и во 1).

¹⁾ Да се види на пример [1] стр. 42.

Наредната теорема е обопштение на теоремата 1 и се докажува на ист начин како и нејзиниот специјален случај.

Теорема 1'. *Конгруенцијата α од аљебарската структура $A(\Phi)$ е $(f_1 = g_1, \dots, f_k = g_k)$ — конгруенција ако и само ако $\alpha \leq \tau$. Сигема τ е мно-жеството од сите шакви конгруенции е комилейна лангиса, а τ е најмал елемент на оваа лангиса.*

Дека теоремата 1 е специјален случај од 1', следува од тоа што кон-груенцијата α од групидот G е асоцијативна ако и само ако е $(x(yz) = (xy)z)$ — конгруенција.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Birkhoff G.: Lattice Theory, Amer. Math. Coll. Publ. 25 (1948).
- [2] Dubreil P.: Algèbre T. 1. Paris 1954.
- [3] Post E. L.: Polyadic groups, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 200—350.
- [4] Tvermoe H.: Über eine verallgemeinerung des Gruppenbegriffs, Math. Scand 1 (1953), 18—30.
- [5] Thurston H. A.: Some properties of partly—associative operations, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 487—498.
- [6] Чупона Г.: За n -арните подполугрупи, Билт. Друшт. Мат. Физ. Макед. 12 (1961), 5—13.

G. Čupona

ON ASSOCIATIVE CONGRUENCES OF A GROUPOID

(Summary)

1. A congruence α of a groupoid G is said to be *associative* if $(xy)z \alpha x(yz)$ for every $x, y, z \in G$, i. e. if the corresponding factor-groupoid G/α is a semigroup.

Let G be a groupoid and ω a relation on G defined by: $x\omega y \Leftrightarrow$ there exist elements a_1, \dots, a_m and products Π', Π'' such that $x = \Pi' a_1 \dots a_m$, $y = \Pi'' a_1 \dots a_m$; for example, $x = (a_1 a_2)(a_3 a_4)$, $y = a_1((a_2 a_3) a_4)$. Then the relation τ determined by: $x\tau y \Leftrightarrow$ there exist elements $x = z_1, \dots, z_k = y$ such that $z_i \varphi z_{i+1}$ — is an associative congruence in the groupoid G . And a congruence ρ is associative if and only if $\tau \leq \rho$ (i. e. $x\tau y \Rightarrow x\rho y$). Therefore the class of all associative congruences of a groupoid is a complete lattice and τ is the *minimal associative congruence*.

Example. Let G be an abelian group and let $x : y = xy^{-1}$. Then the minimal associative congruence τ in the quasigroup $G(:)$ is determined by: $x\tau y \Leftrightarrow xy = z^2$ for some $z \in G$. Therefore if R_e^+ is the set of positive real numbers then we have $x\tau y$ for every $x, y \in R_e^+$, i. e. there exists only one associative congruence in the quasigroup $R_e^+(:)$. The lattice of associative congruences in the quasigroup $R_a^+(:)$ is infinite if R_a^+ is the set of positive rational numbers.

2. Let $N(*)$ be an n -semigroup, i. e. « $*$ » is an $(n+1)$ -ary associative operation on the set N (see, for example, [4] p. 19). The semigroup S is said to be a *covering semigroup* of $N(*)$ if (1) N is a *generating* subset of the semigroup S , and (2) $*x_0 \dots x_n = x_0 \cdot x_1 \dots x_n$ for every $x_0, \dots, x_n \in N$ (i. e. N is an n -subsemigroup of S). It is clear that if N and M are two isomorphic n -semigroups, and if F is a covering of M then there exists a covering of N which is isomorphic with F ; therefore we may assume that every covering of M is also a covering of N . If K and F are two coverings of $N(*)$ then the identity mapping on N can be extended to at most one homomorphism of K upon F ; if such a homomorphism exists it is said to be an N -homomorphism. A covering S is called *maximal* if for any covering F of N , there exists an N -homomorphism of S upon F . Let K be a covering of N such that every N -homomorphism of K upon a covering of N is an isomorphism; then K is said to be a *minimal*

covering. It is clear that two maximal coverings of an n -semigroup are isomorphic, but we do not know if this is true for minimal ones.

The main result of this paper is the following.

Theorem. Let $N(*)$ be an n -semigroup, $G = \bigcup_{i=1}^n N^i$ and let a product in G be defined by

$$(x_1, \dots, x_i)(y_1, \dots, y_j) = \begin{cases} (x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_j) & \text{if } i + j \leq n \\ (* x_1 \dots x_i y_1 \dots y_{n-i+1}, \dots, y_j) & \text{if } i + j > n. \end{cases}$$

Let Ω be the class of all associative congruences α of the groupoid G such that $(x)\alpha(y) \Rightarrow x=y$. Then a semigroup S is a covering of N if and only if it is isomorphic with some semigroup G/α where $\alpha \in \Omega$. If τ is the minimal associative congruence of the groupoid G then $\tau \in \Omega$, and G/τ is the maximal covering of N . If F is a covering of N then there exists a minimal covering K of N such that the identity mapping on N can be extended to an N -homomorphism of F upon K . Every covering semigroup of an n -group is a group.

Note. If N contains more than one element then the groupoid G defined in the above Theorem is not a semigroup.