ФИНИТАРНИ АСОЦИЈАТИВНИ ОПЕРАЦИИ СО НЕУТРАЛНИ ЕЛЕМЕНТИ

БРАНКО ТРПЕНОВСКИ и ЃОРЃИ ЧУПОНА

I УВОД

Нека M е произволно непразно множество, а A еднозначно пресликување од M^n во M. За пресликувањето A велиме дека е *n – арна операција* определена во M; притоа, ако слогот елементи $x_1 x_2 \cdots x_n \equiv x_n^1$ од M, со A се пресликува во $y \in M$, ќе пишуваме

$$y = A(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_n^1. \tag{1.1}$$

Алгебарската структура што на M ја изградува операцијата A ќе ја означуваме со $M(A)$.

Структурата $M(A)$ ќе ја викаме (i, j) – *асоцијативна,* ако за секои $x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1} \in M$ е точно равенството

$$x_{i-1}^1 (x_{i+n-1}^i) x_{2n-1}^{i+n} = x_{j-1}^1 (x_{j+n-1}^j) x_{2n-1}^{j+n}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n. \tag{1.2}$$

Ако равенството (1.2) е точно за секој пар (i, j), каде $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, структурата $M(A)$ ќе ја викаме *асоцијативна.*

За елементот $a \in M$ велиме дека припаѓа на *центарот* од структурата $M(A)$, ако за секои $x_1, \cdots, x_{n-1} \in M$, и секои $1 \leqslant i < j \leqslant n$, е точно равенството

$$x_{i-1}^1 \, a x_{n-1}^i = x_{j-1}^1 \, a x_{n-1}^j. \tag{1.3}$$

Ако за секое $x \in M$ е точно равенството

$$e_{i-1}^1 \, x e_{n-1}^i = x, \tag{1.4}$$

слогот e_{n-1}^1 ќе го викаме *i – неутрален.* Ако сите елементи од слогот e_{n-1}^1, кои го задоволуваат равенството (1.4), се еднакви со еден елемент e, елементот e ќе го викаме *i – неутрален* за $M(A)$; елементот e се вика *неутрален* за $M(A)$, ако е i – неутрален за секое $1 \leqslant i \leqslant n$.

Целта на оваа работа е да ја докажеме следната

ТЕОРЕМА. *Ако $M(A)$ е (i, j) – асоцијативна структура и има барем еден неутрален елемент кој припаѓа на нејзиниот центар, тогаш постои полугрупа $M(*)$, единствена до изоморфизам, таква да за секои $x_1, \cdots, x_n \in M$ е*

(1.5) $$A(x_1, \cdots, x_n) = x_1 \bullet \cdots \bullet x_n.$$

Освен тоа се покажува уште и:

Ако $M(A)$ е асоцијативна структура за која e^1_{n-1} е 1 – неутрален слог, а f^1_{n-1} n – неутрален слог, тогаш постои полугрупа $M(\bullet)$, со иста особина како и во горната теорема, ако и само ако постои некој неутрален елемент во $M(A)$.

Ако $M(A)$ има барем еден неутрален елемент, тогаш од $(i, i+1)$ односно $(i, i+2)$ – асоцијативноста на $M(A)$ следува нејзината асоцијативност.

Од друга страна, се дава пример при кој од $(1, n)$ – *асоцијативноста на структурата $M(A)$ и егзистенција на еден нејзин неутрален елемент, кога A е n – арна операција при $n \geqslant 4$, не следува нејзината асоцијативност.*

2. ДОКАЗ НА ТЕОРЕМАТА

Најнапред ќе докажеме неколку помошни ставови од кои некои имаат поопшт карактер.

Ако A е n – арна операција, и ако за секои $x_1, \cdots, x_n \in M$ ставиме $A^*(x_1, \cdots, x_n) = A(x_n, \cdots, x_1)$, добиваме нова операција A^* која ја викаме *дуална* за A. Очигледна е точноста на следната

Лема 2.1. *Структурата $M(A)$ е (i, j) – асоцијативна ако и само ако $M(A^*)$ е (i^*, j^*) – асоцијативна, каде $i^* = n - j + 1$ и $j^* = n - i + 1$.*

Лема 2.2. *Ако $M(A)$ е $(i, i+k)$ – асоцијативна структура, $1 \leqslant k \leqslant i-1$, за која e^1_{n-1} е $i+k$ – неутрален слог, тогаш $M(A)$ е и $(i-k, i)$ - асоцијативна структура.*

Доказ.

$$\begin{aligned} x^1_{i-k-1}(x^{i-k}_{i-k+n-1})\, x^{i-k+n}_{2n-1} &= e^1_{i+k-1}(x^1_{i-k-1}(x^{i-k}_{i-k+n-1})\, x^{i-k+n}_{2n-1})\, e^{i+k}_{n-1} \\ &= e^1_{i-1}\,(e^i_{i+k-1}\, x^1_{i-k-1}(x^{i-k}_{i-k+\ -1})\, x^{i-k+n}_{2n-k-1})\, x^{2n-k}_{2n-1}\, e^{i+k}_{n-1} \\ &= e^1_{i-1}\,(e^i_{i+k-1}\, x^1_{i-1}(x^i_{i+n-1})\, x^{i+n}_{2n-k-1})\, x^{2n-k}_{2n-1}\, e^{i+k}_{n-1} \\ &= e^1_{i+k-1}(x^1_{i-1}(x^i_{i+n-1})\, x^{i+n}_{2n-1})\, e^{i+k}_{n-1} \\ &= x^1_{i-1}(x^i_{i+n-1})\, x^{i+n}_{2n-1}. \end{aligned}$$

Лема 2.3. *Ако $M(A)$ е $(i, i+k)$ – асоцијативна структура, $k \geqslant 1$ и $n \geqslant i + 2k$, за која e^1_{n-1} е i – неутрален слог, тогаш $M(A)$ е и $(i+k, i+2k)$ – асоцијативна структура.*

Доказ. Следува од лемите 2.1 и 2.2.

Лема 2.4. *Ако $M(A)$ е $(i, i+k)$ – асоцијативна структура, $k \geqslant 1$, за која* **е** *е неутрален елемент што припаѓа на нејзиниот центар, тогаш $M(A)$ е и $(1, n)$ – асоцијативна структура.*

Доказ. Спрема лемата 2.2, можеме да претпоставиме дека $i < 1 + k$. Ако $i > 1$, добиваме:

$$
\begin{aligned}
x_{i+k-1}^{1}(x_{i+k+n-1}^{i+k})\,x_{2n-1}^{i+k+n} &= \underbrace{e\cdots e}_{i-1}(x_{i+k-1}^{1}(x_{i+k+n-1}^{i+k})\,x_{2n-1}^{i+k+n})\,\underbrace{e\cdots e}_{n-i}\\
&= \underbrace{e\cdots e}_{i-1}\,x_k^1(x_{i+k-1}^{k+1}(x_{i+k+n-1}^{i+k})\,x_{2n-1}^{i+k+n}\,\underbrace{e\cdots e}_{k})\,\underbrace{e\cdots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\cdots e}_{i-1}\,x_k^1\,(\underbrace{e\cdots e}_{i-1}\,x_{i+k-1}^{k+1}\,\underbrace{e\cdots e}_{k-i+1}(x_{i+k+n-1}^{i+k})\,x_{2n-1}^{i+k+n})\,\underbrace{e\cdots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\cdots e}_{i-1}\,x_k^1\,(\underbrace{e\cdots e}_{i-1}(x_{i+k-1}^{k+1}\,\underbrace{e\cdots e}_{k-i+1}\,x_{i+n-1}^{i+k})\,x_{2n-1}^{i+n})\,\underbrace{e\cdots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\cdots e}_{i-1}\,x_k^1\,(\underbrace{e\cdots e}_{i-1}(x_{i+n-1}^{k+1}\,\underbrace{e\cdots e}_{k-i+1})\,x_{2n-1}^{i+n})\,\underbrace{e\cdots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\cdots e}_{i-1}(x_k^1\,\underbrace{e\cdots e}_{i-1}(x_{i+n-1}^{k+1}\,\underbrace{e\cdots e}_{k-i+1})\,x_{2n-k-1}^{i+n})\,x_{2n-1}^{2n-k}\,\underbrace{e\cdots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\cdots e}_{i-1}(\underbrace{e\cdots e}_{i-1}\,x_k^1(x_{i+n-1}^{k+1}\,\underbrace{e\cdots e}_{k-i+1})\,x_{2n-k-1}^{i+n})\,x_{2n-1}^{2n-k}\,\underbrace{e\cdots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\cdots e}_{i-1}(\underbrace{e\cdots e}_{i-1}(x_n^1)\,x_{i+n-1}^{n+1}\,\underbrace{e\cdots e}_{k-i+1}\,x_{2n-k-1}^{i+n})\,x_{2n-1}^{2n-k}\,\underbrace{e\cdots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\cdots e}_{i-1}(\underbrace{e\cdots e}_{k}(x_n^1)\,x_{2n-k-1}^{n+1})\,x_{2n-1}^{2n-k}\,\underbrace{e\cdots e}_{n-i-k}\\
&= \underbrace{e\cdots e}_{i+k-1}((x_n^1)\,x_{2n-1}^{n+1})\,\underbrace{e\cdots e}_{n-i-k}\\
&= (x_n^1)\,x_{2n-1}^{n+1},
\end{aligned}
$$

т.е. $M(A)$ е $(1, i+k)$ - асоцијативна структура.

Спрема горниот доказ и лемите 2.1 и 2.3 следува дека $M(A)$ е и (i, n) - асоцијативна структура, со што лемата е докажана.

Лема 2.5. *Ако* $M(A)$ *е* (i, j) *– асоцијативна структура за некој пар* $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *и ако има барем еден неутрален елемент што припаѓа на нејзиниот центар, тогаш таа е асоцијативна структура.*

Доказ. Нека e е неутрален елемент на $M(A)$. Спрема лемата 2.4. доволно е да покажеме дека од $(1, n)$ - асоцијативноста на структурата $M(A)$ следува нејзината асоцијативност. Ако $1 < \nu < n$ и

$$y = x_{\nu-1}^{1}(x_{\nu+n-1}^{\nu})\,x_{2n-1}^{\nu+n}, \tag{2.1}$$

ќе покажеме дека

$$y = (x_n^1)\,x_{2n-1}^{n+1}, \tag{2.2}$$

од каде ќе следува доказот на лемата.

Најнапред ќе покажеме дека е точно равенството

$$(2.3)\qquad (x_p^1 \underbrace{e\cdots e}_{n-p})\, x_{p+n-1}^{p+1} = (x_{p+q}^1 \underbrace{e\cdots e}_{n-p-q})\, x_{p+n-1}^{p+q+1} \underbrace{e\cdots e}_{q}, \qquad q \leqslant n-p.$$

Навистина,

$$(x_p^1 \underbrace{e\cdots e}_{n-p})\, x_{p+n-1}^{p+1} = x_p^1 \underbrace{e\cdots e}_{n-p-1} (e x_{p+n-1}^{p+1}) = x_p^1 \underbrace{e\cdots e}_{n-p-1} (x_{p+n-1}^{p+1}\, e)$$

$$= (x_p^1 \underbrace{e\cdots e}_{n-p-1} x_{p+1})\, x_{p+n-1}^{p+2}\, e = (x_{p+1}^1 \underbrace{e\cdots e}_{n-p-1})\, x_{p+n-1}^{p+2}\, e.$$

Равенството (2.3) ќе се добие ако истата постапка се повтори уште $q-1$ пати.

Со оглед на равенството (2.3) доказот на лемата се добива лесно:

$$y = x_{\nu-1}^1 (x_{\nu+n-1}^{\nu})\, x_{2n-1}^{\nu+n} = (x_1 \underbrace{e\cdots e}_{n-1})\, x_{\nu-1}^2 (x_{\nu+n-1}^{\nu})\, x_{2n-1}^{\nu+n}$$

$$= (x_{\nu-1}^1 (x_{\nu+n-1}^{\nu}) \underbrace{e\cdots e}_{n-\nu})\, x_{2n-1}^{\nu+n} \underbrace{e\cdots e}_{\nu-1} = (x_{\nu-1}^1 \underbrace{e\cdots e}_{n-\nu} (x_{\nu+n-1}^{\nu}))\, x_{2n-1}^{\nu+n} \underbrace{e\cdots e}_{\nu-1}$$

$$= ((x_n^1)\, x_{\nu+n-1}^{n+1} \underbrace{e\cdots e}_{n-\nu})\, x_{2n-1}^{\nu+n} \underbrace{e\cdots e}_{\nu-1} = ((x_n^1)\, x_{2n-1}^{n+1}) \underbrace{e\cdots e}_{n-1} = (x_n^1)\, x_{2n-1}^{n+1},$$

со што е докажана точноста на (2.2).

Лема 2.6. *Ако* $M(A)$ *е* $(1,2)$ *– асоцијативна структура и* e_{n-1}^1 *нејзин* 1 *– неутрален слој, тогаш постои бинарна операција «∗» таква да за секои* $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n \in M$ *е*

$$(2.4)\qquad A(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = x_1 * (x_2 * \cdots * (x_{n-1} * x_n)\cdots),$$

ако и само ако постои некој 1 *– неутрален елемент за* $M(A)$.

Доказ. Ако во (2.4) замениме $x_1 = x$ и $x_{i+1} = e_i$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$, ќе добиеме дека $e = e_1 * (e_2 * \cdots * (e_{n-2} * e_{n-1})\cdots)$ е десен неутрален елемент за «∗», поради што и 1 – неутрален елемент за $M(A)$.

Обратно, нека e е 1 – неутрален елемент за $M(A)$, и нека за секои $x_1, x_2 \in M$ ставиме,

$$(2.5)\qquad x_1 * x_2 = x_1 x_2 \underbrace{e\cdots e}_{n-2}.$$

Од (2.5), поради $(1,2)$ – асоцијативноста на $M(A)$ се добива

$$x_1 * (x_2 * x_3) = x_1 (x_2 x_3 \underbrace{e\cdots e}_{n-2}) \underbrace{e\cdots e}_{n-2} =$$

$$= (x_1 x_2 x_3 \underbrace{e\cdots e}_{n-3}) \underbrace{e\cdots e}_{n-1} = x_1 x_2 x_3 \underbrace{e\cdots e}_{n-3},$$

а со примена на уште $n-3$ пати на истата постапка ќе се добие доказот на лемата.

Лема 2.7. *Ако* $M(A)$ *е* $(n-1, n)$ *– асоцијативна структура и* f_{n-1}^1 *нејзин* n *– неутрален слој, тогаш постои бинарна операција* «$*$» *таква да за секои* $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n \in M$ *е*

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = (\cdots(x_1 * x_2) * \cdots * x_{n-1}) * x_n, \tag{2.6}$$

ако и само ако постои некој n *– неутрален елемент за* $M(A)$.

Доказ. Следува од лемите 2.1 и 2.2.

Нека ја докажеме сега теоремата. Ако e е неутрален елемент за $M(A)$ и припаѓа на нејзиниот центар, спрема лемата 2.5 $M(A)$ е асоцијативна, а ако операцијата «$*$»$'$ ја определиме со равенството (2.5), спрема лемата 2.6 важи равенството (2.4). За да ја докажеме теоремата треба да покажеме дека $M(*)$ е полугрупа определена еднозначно до изморфизам.

Навистина,

$$(x_1 * x_2) * x_3 = (x_1 x_2 \underbrace{e \cdots e}_{n-2}) x_3 \underbrace{e \cdots e}_{n-2} = x_1 (x_2 \underbrace{e \cdots e}_{n-2} x_3) \underbrace{e \cdots e}_{n-2}$$
$$= x_1 (x_2 x_3 \underbrace{e \cdots e}_{n-2}) \underbrace{e \cdots e}_{n-2} = x_1 * (x_2 * x_3),$$

т. е. $M(*)$ е полугрупа.

Нека $M(\circ)$ е друга полугрупа со таа особина и нека f е нејзин неутрален елемент. За секои $x, y \in M$ добиваме

$$x \circ y = x \circ f \circ \cdots \circ f \circ y = x * f * \cdots * f * y = x * a * y, \tag{2.7}$$

каде $a = f * \cdots * f$.

Од равенството (2.7) е јасно дека f е инверзен елемент за a во $M(*)$, од каде, ако за секое $x \in M$ ставиме $\varphi(x) = x * a$, ќе добиеме дека φ е изоморфизам од $M(\circ)$ на $M(*)$.

Теоремата е докажана.

Како директна последица од теоремата и лемите 2.6 и 2.7 се добива:

Ако $M(A)$ *е асоцијативна структура за која* e_{n-1}^1 *е* 1 *– неутрален, а* f_{n-1}^1 n *– неутрален слој, тогаш постои полугрупа* $M(*)$, *еднозначно определена до изморфизам, таква да важи равенството* (1.5), *ако и само ако постои некој неутрален елемент во* $M(A)$.

3. НЕКОИ ЗАБЕЛЕШКИ

3.1 *Ако* $M(A)$ *е* $(i, i+1)$ *– асоцијативна структура и има барем еден неутрален елемент* e, *тогаш е припаѓа на нејзиниот центар;*

$$x^1_{i-1}\, ex^i_{n-1} = x^1_{i-1}\, e(\underbrace{e\cdots e}_{i-1}\, x_i\, \underbrace{e\cdots e}_{n-i})\, x^{i+1}_{n-1}$$

$$= x^1_{i-1}\, (\underbrace{e\cdots e}_{i}\, x_i\, \underbrace{e\cdots e}_{n-i-1})\, ex^{i+1}_{n-1} = x^1_i\, e\, x^{i+1}_{n-1}.$$

Ако над $x^1_i ex^{i+1}_{n-1} = \underbrace{e\cdots e}_{i-1}(x^1_i ex^{i+1}_{n-1})\underbrace{e\cdots e}_{n-i}$ примениме $(i, i+1)$ - асоцијативност, го искористиме претходниот резултат и пак примениме $(i, i+1)$ – асоцијативност, ќе добиеме дека e пермутира со x_{i+1}, а со последователна примена на истата постапка ќе се добие дека e пермутира со секој x_k за $k \geqslant i$. Ако пак иста постапка примениме доволен број пати над $x^1_{i-1}\, ex^i_{n-1} = \underbrace{e\cdots e}_{i}(x^1_{i-1}\, ex^i_{n-1})\underbrace{e\cdots e}_{n-i-1}$, ќе добиеме дека e пермутира со секое x_k и за $k < i$, т. е. e припаѓа на центарот од $M(A)$.

Ако $M(A)$ е $(i, i+2)$ – асоцијашивна сшрукшура и има барем еден неушрален елеменш e, шоіаш шој ӣриӣаѓа на нејзиниош ценшар:

Доказот на ова тврдење се добива слично како и во претходниот случај, само што овде треба да се искористат равенствата

$x^1_{i-1}\, ex^i_{n-1} = x^1_i\, ex^{i+1}_{n-1} = x^1_{i+1}\, ex^{i+2}_{n-1}$, кои се добиваат од:

$$x^1_{i-1}\, ex^i_{n-1} = x^1_{i-1}\, ex_i\, (\underbrace{e\cdots e x_{i+1}}_{n-1})\, x^{i+2}_{n-1}$$

$$= x^1_{i-1}\, (ex_i\, \underbrace{e\cdots e}_{n-2})\, ex^{i+1}_{n-1} = x^1_i\, ex^{i+1}_{n-1},$$

$$x^1_{i-1}\, ex^i_{n-1} = x^1_{i-1}\, ex_i\, (\underbrace{e\cdots e x_{i+1}\, e}_{n-2})\, x^{i+2}_{n-1}$$

$$= x^1_{i-1}\, (ex_i\, \underbrace{e\cdots e}_{n-2})\, x_{i+1}\, ex^{i+2}_{n-1} = x^1_{i+1}\, ex^{i+2}_{n-1}.$$

Можат да се најдат и други конкретни примери што не се опфатени со горните два случаи при кои важи ист резултат, каков што е следниот

Пример 3.1.1. Нека A е 6 – арна операција и $M(A)$ $(2, 5)$ – асоцијативна структура, за која e е неутрален елемент. Лесно се покажува дека $x_1 eex_2 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3 eex_4$ и $x_1 eeex_2 x_3 = x_1 x_2 eeex_3$, со чија пак помош се добива дека e припаѓа на центарот од $M(A)$.

Најопшто пак ваков резултат не важи, како што покажува следниот

Пример 3.1.2. Нека $G(*)$ е некомутативна група (наместо $x * y$ ќе пишуваме xy), а A n – арна операција за $n \geqslant 4$, определена со:

за секои $x_1 x_2, \cdots, x_n \in M$, $A(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_2^{-1} \cdots x_{n-1}^{-1} x_2 \cdots x_{n-1} x_n$.

Лесно се покажува дека $G(A)$ е $(1, n)$ – асоцијативна структура и дека неутралниот елемент e од $G(*)$ е неутрален елемент и за $G(A)$. Меѓутоа, e не припаѓа на центарот од $G(A)$. Кога e би припаѓал на центарот од $G(A)$, за секои $x, y \in G$ би требало да важи

(*) $\qquad A(x, y, e, \cdots, e) = A(e, x, y, e, \cdots, e).$

Бидејќи,

$$A(x, y, e, \cdots, e) = xy,\ A(e, x, y, e, \cdots, e) = xyx^{-1}y^{-1}xy,$$

спрема (*) би добиле $xy = xyx^{-1}y^{-1}xy$, односно, $xy = yx$, што противуречи со претпоставката дека $G(*)$ е некомутативна група.

Од забелешките штс ги направивме во оваа точка, природно се наметнува проблемот: да се испита за кои парови $1 < i < j < n$ од (i, j)-асоцијативноста на структурата $M(A)$, при егзистенција на барем еден нејзин неутрален елемент, следува нејзината асоцијативност.

3.2. Погоре изнесениот проблем може на природен начин да се обопшти:

Нека A е n-арна операција и $\Pi_1 x_m^1$ и $\Pi_2 x_m^1$ два „производи" добиени со повеќекатна примена на операцијата A над елементите $x_1, x_2, \cdots, x_m \in M$, за кои ќе претпоставуваме дека се сите меѓу себе различни и дека во секој од производите Π_1 и Π_2 се сретнуваат само по еднаш. Лесно се покажува дека во овој случај m е од облик $k(n-1)+1$. Ако за секои $x_1, x_2, \cdots, x_m \in M$, равенството

$$\Pi_1 x_m^1 = \Pi_2 x_m^1 \tag{3.2.1}$$

не е тривијален идентитет, се поставува прашањето: дали и во кои случаи од (3.2.1) следува асоцијативност, односно комутативност на структурата $M(A)$, каде за $M(A)$ велиме дека е *комутативна* ако за секои $x_1, x_2, \cdots, x_n \in M$ и секои $1 \leqslant i < j \leqslant n$ важи равенството

$$x_{i-1}^1\, x_i\, x_{j-1}^{i+1}\, x_j\, x_n^{j+1} = x_{i-1}^1\, x_j\, x_{j-1}^{i+1}\, x_i\, x_n^{j+1}. \tag{3.2.2}$$

Решение на овој проблем, кога A е бинарна операција има дадено *V. Devidé*[1]), кој што покажал дека, ако $M(A)$ има барем еден неутрален елемент и ако (3.2.1) не е директна последица на асоцијативност (т. е. ако (3.2.1) не може да се сведе на тривијален идентитет со примена на (i, j)-асоцијативности за секои $1 \leqslant i < j \leqslant n$), тогаш $M(A)$ ќе биде комутативна структура, односно, ако (3.2.1) не е директна последица на комутативност, од него следува асоцијативност на структурата $M(A)$.

На два конкретни примери ќе покажеме дека ваков резултат може да важи и кога A не е бинарна операција.

Пример 3.2.1. Нека A е тернарна операција, и нека за секои $x_1, \cdots, x_7 \in M$ во $M(A)$ е точно равенството

$$(x_1 x_2 x_3)\, x_4\, (x_5 x_6 x_7) = x_1\, (x_2\, (x_3 x_4 x_5)\, x_6)\, x_7. \tag{3.2.3}$$

Ако постои барем еден неутрален елемент во $M(A)$, $M(A)$ ќе биде асоцијативна структура.

Ако e е неутрален елемент за $M(A)$, тогаш тој припаѓа на нејзиниот центар:

[1]) Glasnik Mat. — Fiz. Astr. Ser. II. t. 6 (1951), str. 33—48.

$$x_1\, ex_2 = (\, eex_1)\, e\, (\, eex_2) = e\, (e\, (x_1\, ee)\, e)\, x_2 = ex_1\, x_2,$$
$$x_1\, ex_2 = (x_1\, ee)\, e\, (x_2\, ee) = x_1\, (e\, (\, eex_2)\, e)\, e = x_1\, x_2\, e.$$

$M\,(A)$ е $(1, 2)$ – асоцијативна структура:

$$\begin{aligned}(x_1\, x_2\, x_3)\, x_4\, x_5 &= (x_1\, x_2\, x_3)\, x_4\, (eex_5) = x_1\, (x_2\, (x_3\, x_4\, e)\, e)\, x_5\\ &= x_1 (x_2 (ex_3\, x_4)\, e)\, x_5 = (x_1\, x_2\, e)\, x_3\, (x_4\, ex_5)\\ &= (ex_1\, x_2)\, x_3 (x_4\, x_5\, e) = e\, (x_1\, (x_2\, x_3\, x_4)\, x_5)\, e\\ &= x_1\, (x_2\, x_3\, x_4)\, x_5.\end{aligned}$$

Дека $M\,(A)$ е асоцијативна структура следува од лемата 2.5.

Пример 3.2.2. Нека A е тернарна операција, и нека за секои $x_1, \cdots, x_5 \in M$ во $M\,(A)$ е точно равенството

$$(x_1\, x_2\, x_3)\, x_4\, x_5 = (x_1\, x_2\, x_4)\, x_3\, x_5. \tag{3.2.4}$$

Ако постои барем еден неутрален елемент во $M\,(A)$, тогаш таа ќе биде и асоцијативна и комутативна структура.

Ако e е неутрален елемент за $M\,(A)$, тогаш тој припаѓа на нејзиниот центар:

$$x_1\, ex_2 = (x_1\, ex_2)\, ee = (x_1\, ee)\, x_2\, e = x_1\, x_2\, e = (ex_1\, e)\, x_2\, e = (ex_1\, x_2)\, ee = ex_1\, x_2.$$

$M\,(A)$ е комутативна структура:

$$x_1\, x_2\, x_3 = (eex_1)\, x_2\, x_3 = (eex_2)\, x_1\, x_3 = x_2\, x_1\, x_3.$$
$$\begin{aligned}x_1\, x_2\, x_3 &= (x_1 x_2\, x_3)\, ee = (x_1 x_2\, e)\, x_3 e = (ex_1\, x_2)\, x_3\, e = (ex_1\, x_3)\, x_2\, e\\ &= (ex_1\, x_3)\, ex_2 = (ex_1 e)\, x_3 x_2 = x_1\, x_3\, x_2.\end{aligned}$$

$M\,(A)$ е асоцијативна структура:

Поради, $(x_1\, x_2\, x_3)\, x_4\, x_5 = x_4\, (x_1\, x_2\, x_3)\, x_5$ и

$(x_1\, x_2\, x_4)\, x_3\, x_5 = (x_4\, x_1\, x_2)\, x_3\, x_5$, од (3.2.4) добиваме

$$(x_4\, x_1\, x_2)\, x_3\, x_5 = x_4\, (x_1\, x_2\, x_3)\, x_5,$$

после што тврдењето следува од лемата 2.5.

G. Čupona and B. Trpenovski

FINITARY ASSOCIATIVE OPERATIONS WITH NEUTRAL ELEMENTS

Summary

1. Let A be an *n-ary operation* on the set S; if A maps the sequence $x_1, x_2, \cdots, x_n \in S$ on $y \in S$, we write $y = A\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ or $y = x_1\, x_2 \cdots x_n = x_n^1$.

The algebra $S\,(A)$ is (i, j) – *associative* if

$$x_{i-1}^1\, (x_{i+n-1}^i)\, x_{2n-1}^{i+n} = x_{j-1}^1\, (x_{j+n-1}^j)\, x_{2n-1}^{j+n}, \tag{1}$$

for every $x_1, \cdots, x_{2n-1} \in S$; $S(A)$ is *associative* if it is (i, j) - associative for every pair i, j, where $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

The element $a \in S$ is in the *centre* of algebra $S(A)$ if

(2) $$x_{i-1}^1 \, a x_{n-1}^i = x_{j-1}^1 \, a x_{n-1}^j,$$

for every $x_1, \cdots, x_{n-1} \in S$, and every pair i, j.

The sequence $e_1 \cdots, e_{n-1} \in S$ is *i - neutral* for $S(A)$, if

(3) $$e_{i-1}^1 \, x e_{n-1}^i = x,$$

for every $x \in S$; $e \in S$ is *i - neutral* in $S(A)$, if the sequence $e, \cdots, e$ is *i* - neutral for $S(A)$; $e \in S$ is *neutral* element in $S(A)$ if it is *i* - neural for every *i*.

2. The main result of this paper is the following

Theorem. *If there is a neutral element in the centre of the algebra $S(A)$, and if $S(A)$ is (i, j) - associative for some pair $i \neq j$, then $S(A)$ is associative, too.*

If e is a neutral element in the associative algebra $S(A)$, and if $x * y = A(x, y, e, \cdots, e)$, then $S(*)$ is a semigroup such that $x_n^1 = x_1 * x_2 * \cdots * x_n$, for every $x_1, x_2, \cdots, x_n \in S$; if $S(\circ)$ is another one semigroup with the same characteristic, then it is isomorphic with $S(*)$.

The following more general lemmas have been used in the proof of the above Theorem.

Lemma 1(2). *If the algebra $S(A)$ is $(i, i+k)$ - associative, where $1 \leqslant k < i-1$ $(k \geqslant 1, n \geqslant i+2k)$, and if there is a $i+k$ - neutral (i - neutral) sequence for $S(A)$, then $S(A)$ is also $(i-k, i)$ - assoeiative ($(i+k, i+2k)$ - associative).*

Lemma 3(4). *If $S(A)$ is $(1, 2)$ - associative ($(n-1, n)$ - associative), and if there exists an 1 - neutral (n—neutral) sequence for $S(A)$, then there is a groupoid $S(*)$ such that*

(4) $$x_n^1 = x_1 * (x_2 * \cdots * (x_{n-1} * x_n) \cdots) \quad (= (\cdots (x_1 * x_2) * \cdots * x_{n-1}) * x_n),$$

if and only if there exists an 1 - netral (n - neutral) element in $S(A)$.

Example 1. *Let $G(*)$ be a non-abelian group, and let $n > 3$. If we put*

(5) $$A(x_1, \cdots, x_n) = x_1 * \cdots * x_{n-1} * x_2^{-1} * \cdots * x_{n-1}^{-1} * x_2 * \cdots * x_n,$$

we shall obtain an $(1, n)$ - associative algebra $G(A)$, with a neutral element e (e is the neutral element of the group), but $G(A)$ is not associative.

From this example follows that, in general, it is necessary — in the first part of the Theorem — to suppose that some neutral element of $S(A)$ is in the centre of $S(A)$.

In some special cases the (i, j) - associativity of the algebra $S(A)$ implies that every neutral element of $S(A)$ is in the centre of $S(A)$. One such case we have if $j = i+1$ or $j = i+2$.

3. It is of interest to consider the classes of algebras $S(A)$, which have neutral elements, and which satisfy some identity of the forme

$$\Pi_1(x_1, x_2, \cdots, x_r) = \Pi_2(y_1, y_2, \cdots, y_s), \tag{6}$$

where Π_i are continued products in the algebra $S(A)$, and $x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_s$ are arbitrary elements of S, so that $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ if $i \neq j$; clearly then we have $r = s$ and $y_1, \cdots, y_s$ is a permutation of $x_1, \cdots, x_r$.