Математички Билтен
15 (XLI)
1991 (69-76)
Скопје, Југославија

ЗА ЕДНА ОЦЕНКА НА ПОГРЕШНОСТА НА МАТРИЧНО-КВАДРАТУРНИОТ ПРОЦЕС

В. Бабинкостов

Нека е дадена функцијата $f \in C\{[0,1]\}$ со вредности $f_i = f(x_i)$ во еднаквооддалечените точки-јазли $x_i = ih$ $(i=0,1,\dots,n;\ nh=1)$ на оската на аргументот $x \in [0,1]$. Пресметувајќи ги вредностите $y_i = y(x_i)$ на функцијата

$$y(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

со помош на една или друга квадратурна формула се добива

$$y_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} f_j + r_i \qquad (y_0 = 0),$$

каде што α_{ij} се некои коефициенти, r_i - остаточни членови, односно

$$y = AF + R, \tag{1}$$

каде што $y = [y_i] = \text{colon}(y_0, y_1, \dots, y_n)$, $F = [f_i] = \text{colon}(f_0, f_1, \dots, f_n)$, $R = [r_i] = \text{colon}(r_0, r_1, \dots, r_n)$ се вектори-колони, а A е матрица од облик

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Во таа смисла, за (1) зборуваме како за матрично-квадратурен процес, кој по испуштање на векторот-остаток R, со точност нему еднаква, овозможува приближно наоѓање на вредностите y_i, примајќи

$$y \approx AF. \tag{2}$$

Така, применувајќи ја трапезната квадратурна формула, се добива

$$Y = A_1 F + R_1 , \qquad (3)$$

каде што

$$A_1 = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & \ldots\ldots & . \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots\ldots & 1 \end{bmatrix},$$

а со наизменично применување на формулата на параболи и правилото на "три осминки" се добива

$$Y = A_2 F + R_2 , \qquad (4)$$

каде што

$$A_2 = \frac{h}{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 12 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 8 & 32 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 9 & 27 & 27 & 9 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 8 & 32 & 16 & 32 & 8 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 8 & 32 & 17 & 27 & 27 & 9 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 8 & 32 & 16 & 32 & 16 & . & . & . & 32/17 & & 16/27 & & 32/27 & & 8/9 \end{bmatrix}$$

Подолу, користејќи ги остаточните членови на применуваните квадратурни формули, укажуваме на некои оценки за векторите R_1 и R_2 на погрешностите на формулите (3) и (4), уточнувајќи ги соодветните оценки дадени за нив во [3].

Имено, допуштајќи функцијата f да има втор извод f" така што $|f''(x)| \leq M$ при $x \in [0,1]$, во [3] се тврди дека

$$[|(R_1)_i|] = [|(Y - A_1 F)_i|] = R_1 ,$$

каде што

$$R_1 = \frac{Mh^3}{12} \operatorname{colon}(0,1,1,\ldots,1).$$

Меѓутоа, поаѓајќи од равенството

$$(R_1)_i = \int_0^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{i}(f_{k-1}+f_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{i}\{\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{k-1}+f_k)\} = -\frac{h^3}{12}\sum_{k=1}^{i} f''(\xi_k),$$

$$(x_{k-1} \le \xi_k \le x_k)$$

при допуштениот услов се добива дека

$$|(R_1)_i| \le \frac{Mh^3}{12}i, \; .$$

односно

$$R_1 = \frac{Mh^3}{12}\mathrm{colon}(0,1,2,...,n).$$

Можно е, исто така, со оглед на

$$(R_1)_i = \frac{h^3}{12}\left|\sum_{k=1}^{i} f''(\xi_k)\right| \le \frac{h^2}{12n}\sum_{k=1}^{n}|f''(\xi_k)| \le \frac{Mh^2}{12},$$

да се запише

$$R_1 = \frac{Mh^2}{12}\mathrm{colon}(0,1,1,...,1),$$

што, секако, претставува погруба оценка.

Во поопшт случај, сметајќи дека наместо точните вредности f_i на функцијата $f \in C^{(2)}\{[0,1]\}$ во точките x_i се дадени нејзините приближни вредности f_i^* со погрешност не поголема од $\frac{Mh^2}{12}$, за векторот R_1^* на таканаречената полна погрешност, составена од погрешноста на применуваната формула и погрешноста на дадените приближни вредности на функцијата f, во [3] се тврди дека

$$[|(R_1^*)_i|] = [|(Y-A_1F^*)_i|] \le R_i^*,$$

каде што

$$R_1^* = \frac{Mh^3}{12}\mathrm{colon}(0,2,3,...,n+1).$$

Но и тука, како и погоре, ќе добива

$$(R_1^*)_i = \int_0^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{i}(f_{k-1}^*+f_k^*) = \sum_{k=1}^{i}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx -$$

$$- \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{i}(f_{k-1}^*+f_k^*) = \sum_{k=1}^{i}\{\frac{h}{2}(f_{k-1}+f_k)-\frac{h^3}{12}f''(\xi_k)\}-\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{i}(f_{k-1}^*+f_k^*) =$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{i}\{(f_{k-1}-f_{k-1}^*)+(f_k-f_k^*) -\frac{h}{6}f''(\xi_k)\},$$

па

$$|(R_1^*)_i| \le \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{i}(|f_{k-1}-f_{k-1}^*|+|f_k-f_k^*| + \frac{h^2}{6}|f''(\xi_k)|) \le$$

$$\le \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{i}(\frac{Mh^2}{12} + \frac{Mh^2}{12} + \frac{Mh^2}{6}) = \frac{Mh^2}{6}i,$$

односно

$$R_1^* = \frac{Mh^3}{6}\mathrm{colon}(0,1,2,\ldots,n).$$

Покрај тоа, допуштајќи во (4) функцијата f да има изводи до четврти ред заклучно и да се исполнети условите

$$|60h^{-2}f''(x)| \le M, \quad |f^{IV}(x)| \le M, \quad \forall x\in[0,1]$$

во [3] се покажува дека

$$[|(R_2)_i|] = [|(Y-A_2F)_i|] \le R_2,$$

каде што

$$R_2 = \frac{Mh}{720}\mathrm{colon}(0,1,8,27,16,35,24,\ldots).$$

Дополнувајќи и уточнувајќи го овој резултат, со оглед на тоа што

$$y_1 = \int_0^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0+f_1)+r_1,$$

$$y_{2m} = \int_0^{x_{2m}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{m}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{i}(f_{2k-2}+4f_{2k-1}+f_{1k})+r_{2m},$$

$$y_{3(2m-1)}=\int_{0}^{x_{3(2m-1)}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{2m-1}\int_{x_{3m-3}}^{x_{3k}} f(x)dx = \frac{3h}{8}\sum_{k=1}^{2m-1}(f_{3k-3}+3f_{3k-2}+$$

$$+3f_{3k-1}+f_{3k})+r_{3(2m-1)},$$

$$y_{3(2m-1)+2}=\int_{0}^{x_{3(2m-1)+2}} f(x)dx = \int_{0}^{x_2} f(x)dx + \sum_{k=1}^{2m-1}\int_{x_{3k-1}}^{x_{3k+2}} f(x)dx =$$

$$= \frac{h}{3}(f_o+4f_1+f_2) + \frac{3h}{8}\sum_{k=1}^{2m-1}(f_{3k-1}+3f_{3k}+3f_{3k+1}+f_{3k+2})+r_{3(2m-1)+2},$$

$$y_{3(2m-1)+4}=\int_{0}^{x_4} f(x)dx + \sum_{k=1}^{2m-1}\int_{x_{3k+1}}^{x_{3k+4}} f(x)dx = \frac{h}{3}\{f_o+4(f_1+f_3)+2f_2+f_4)\}+$$

$$+ \frac{3h}{8}\sum_{k=1}^{2k-1}(f_{3k+1}+3f_{3k+2}+3f_{3k+3}+f_{3k+4})+r_{3(2m-1)+4}$$

за $m \geq 1$, при познат вид на остаточните членови на применуваните квадратурни формули и допуштените услови, можеме да запишеме

$$|r_1|=|\int_{0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_o+f_1)| = \frac{h^3}{12}|f''(\xi)| \leq \frac{h^5M}{720}, \quad (0 \leq \xi \leq x_1),$$

$$|r_{2m}|=|\sum_{k=1}^{m}\{\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx - \frac{h}{3}(f_{2k-2}+4f_{2k-1}+f_{2k})\}| =$$

$$= \frac{h^5}{90}\sum_{k=1}^{m}|f^{IV}(\xi_k)| \leq \frac{8h^5}{720}Mm, \quad (x_{2k-2} \leq \xi_k \leq x_{2k}),$$

$$|r_{3(2m-1)}|=|\sum_{k=1}^{2m-1}\{\int_{x_{3k-3}}^{x_{3k}} f(x)dx - \frac{3h}{8}(f_{3k-3}+3f_{3k-2}+3f_{3k-1}+f_{3k})\}| \leq$$

$$\leq \frac{3h^5}{80}\sum_{k=1}^{2m-1}|f^{IV}(\xi_k^{(1)})| = \frac{27h^5M}{720}(2m-1), \quad (x_{3k-3}\leq\xi_k^{(1)}\leq x_{3k}),$$

$$|r_{3(2m-1)+2}| = \int_0^{x_2} f(x)dx - \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2) + \sum_{k=1}^{2m-1}\{\int_{x_{3k-1}}^{x_{3k+2}} f(x)dx - $$

$$- \frac{3h}{8}(f_{3k-1}+3f_{3k}+3f_{3k+1}+f_{3k+2}) \le$$

$$\le \frac{h}{90}|f^{IV}(\xi_1')| + \frac{3h^5}{80}\sum_{k=1}^{2m-1}|f^{IV}(\xi_k^{(2)})| \le \frac{8+27(2m-1)}{720}Mh^5,$$

$$(0 \le \xi_1' \le x_2,\ x_{3k-1} \le \xi_k^{(2)} \le x_{3k+2}),$$

$$|r_{3(2m-1)+4}| = |\int_0^{x_4} f(x)dx - \frac{h}{3}\{f_0+4(f_1+f_3)+2f_2+f_4\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2m-1}\{\int_{x_{3k+1}}^{x_{3k+4}} f(x)dx - \frac{3h}{8}(f_{3k+1}+3f_{3k+2}+3f_{3k+3}+f_{3k+4}) \le$$

$$\le \frac{h^5}{90}(|f^{IV}(\xi_1'')|+|f^{IV}(\xi_2'')|) + \frac{3h^5}{80}\sum_{k=1}^{2m-1}|f^{IV}(\xi_k^{(3)})| \le$$

$$\le \frac{16+27(2m-1)}{720}Mh^5,\quad (0\le\xi_1''\le x_2\le\xi_2''\le x_4,\ x_{3k+1}\le\xi_k^{(3)}\le x_{3k+4})$$

односно

$$R_2 = \frac{Mh^5}{720}\mathrm{colon}(r_0,r_1,\ldots,r_n),$$

каде што

$$r_i = \begin{cases} 0, & i=0 \\ 1, & i=1, \\ 8k, & i=2k, \qquad (k \ge 1) \\ 27(2k-1), & i=3(2k-1), \\ 8+27(2k-1), & i=3(2k-1)+2, \\ 16+27(2k-1), & i=3(2k-1)+4. \end{cases}$$

Аналогно, во поопшт случај, сметајќи дека, при исти услови, наместо точните вредности f_i на функцијата $f\in C^{(4)}\{[0,1]\}$ во точките x_i се дадени приближните вредности f_i^* со погрешност не поголема од $Mh^4/720$, во однос на векторот R_2^* на полната погрешност за кој во [3] е дадена оценката

$$[|(R_2^*)_i|] = [|(Y-A_2F^*)_i|] = R_2^*,$$

каде што

$$R_2^* = \frac{Mh^5}{720}\mathrm{colon}(0,2,10,30,20,40,30,50,\ldots),$$

се добива

$$|r_1^*| = \left|\int_0^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_0^*+f_1^*)\right| = \left|\frac{h}{2}\{(f_0-f_0^*)+(f_1-f_1^*) - \frac{h^3}{12}f''(\xi)\right| \le$$
$$\le 2\frac{Mh}{720},$$

$$|r_{2m}^*| = \left|\int_0^{x_{2m}} f(x)dx - \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{m}(f_{2k-2}^*+4f_{2k-1}^*+f_{2k}^*)\right| =$$
$$= \left|\frac{h}{3}\sum_{k=1}^{m}\{(f_{2k-2}-f^*_{2k-2})+4(f_{2k-1}-f_{2k-1}^*)+(f_{2k}-f_{2k}^*)\} -\right.$$
$$\left.- \frac{h}{90}\sum_{k=1}^{m} f^{IV}(\xi_k)\right| \le \frac{Mh^5}{720}(2+8m),$$

$$|r_{3(2m-1)}^*| = \left|\int_0^{x_{3(2m-1)}} f(x)dx - \frac{3h}{8}\sum_{k=1}^{2m-1}(f_{3k-3}^*+3f_{3k-2}^*+3f_{3k-1}^*+f_{3k}^*)\right| =$$
$$= \left|\frac{3h}{8}\sum_{k=1}^{2m-1}\{(f_{3k-3}+f_{3k-3}^*)+3(f_{3k-2}-f_{3k-2}^*)+3(f_{3k-1}-f_{3k-1}^*)+(f_{3k}-f_{3k}^*)\}\right.$$
$$\left.- \frac{3h^5}{80}\sum_{k=1}^{2m-1} f^{IV}(\xi_k^{(1)})\right| \le \frac{Mh^5}{720}(3+27(2m-1)),$$

$$|r^*_{3(2m-1)+2}| = \left|\int_0^{x_2} f(x)dx - \frac{h}{3}(f_0^*+4f_1^*+f_2^*) + \sum_{k=1}^{2m-1}\{\int_{x_{3k-1}}^{x_{3k+2}} f(x)dx -\right.$$
$$\left.- \frac{3h}{8}(f_{3k-1}^*+3f_{3k}^*+3f_{3k+1}^*+f_{3k+2}^*)\}\right| = \left|\frac{h}{3}\{(f_0-f_0^*)+4(f_1-f_1^*)+(f_2-f_2^*)\} -\right.$$
$$- \frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi_1') + \frac{3h}{8}\sum_{k=1}^{2m-1}\{(f_{3k-1}-f_{3k-1}^*)+3(f_{3k}-f_{3k}^*)+3(f_{3k+1}-f_{3k+1}^*) +$$
$$\left.+ (f_{3k+2}-f_{3k+2}^*)\} - \frac{3h^5}{80}\sum_{k=1}^{2m-1} f^{IV}(\xi_k^{(2)})\right| \le \frac{Mh^5}{720}(10+30(2m-1)),$$

$$|r_{3(2m-1)+4}^*| = \left|\int_0^{x_4} f(x)dx - \frac{h}{3}\{f_0^*+4(f_1^*+f_3^*)+2f_2^*+f_4^*\} +\right.$$
$$\left.+ \sum_{k=1}^{2m-1}\{\int_{x_{3k+1}}^{x_{3k+4}} f(x)dx - \frac{3h}{8}(f_{3k+1}^*+3f_{3k+2}^*+3f_{3k+3}^*+f_{3k+4}^*)\}\right| =$$

$$= \left|\frac{h}{3}\{(f_0-f_0^*)+4(f_1-f_1^*)+4(f_3-f_3^*)+2(f_2-f_2^*)+(f_4-f_4^*)+\frac{h^5}{90}(f^{IV}(\xi_1'')+f^{IV}(\xi_2''))+\right.$$

$$+\frac{3h}{8}\sum_{k=1}^{2m-1}\{(f_{3k+1}-f_{3k+1}^*)+3(f_{3k+2}-f_{3k+2}^*)+3(f_{3k+3}-f_{3k+3}^*)+$$

$$\left.+(f_{3k+4}-f_{3k+4}^*)\}-\frac{3h^5}{80}\sum_{k=1}^{2m-1}f^{IV}(\xi_k^{(2)})\right| \le \frac{Mh^5}{720}(20+30(2m-1)),$$

односно

$$R_2^* = \frac{Mh^5}{720}\mathrm{colon}(r_0^*,r_1^*,\dots,r_n^*),$$

$$r_i^* = \begin{cases} 0, & i=0,\\ 2, & i=1,\\ 2+8k, & i=2k,\\ 3+27(2k-1), & i=3(2k-1),\\ 10+30(2k-1), & i=3(2k-1)+2,\\ 20+30(2k-1), & i=3(2k-1)+4. \end{cases}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Бахвалов Н.С.: Численные методы, т.1, М., 1973

[2] Крылов В.И.: Приближенное вычисление интегралов, М., 1967

[3] Нестерчук А.В.: О решении обыкновенных дифференциальных уравнений квадратурными формулами, УМЖ, 17, 4, К., 1965

[4] Никольский С.М.: Квадратурные формулы, М., 1974

[5] Фаддеева В.И.: Вычислительные методы линеиной алгебры, М.-Л., 1950

[6] Gastinel N.: Analyzé numerique lineaire, Herman, Paris, 1966

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ МАТРИЧНО-КВАДРАТУРНОГО ПРОЦЕССА

В. Бабинкостов

Р е з ю м е

В работе уточняются данные в [3] оценки погрешностей матрично-квадратурного процесса в некоторых простейших случаях.