Математички Билтен ISSN 0351-336X
35(LXI)
2011(51-59)
Скопје, Македонија

ЗА НЕКОИ АФТОМОРФИЗМИ ВО АФИНИТЕ ПРОСТОРИ

ЕЛЕНА ХАЏИЕВА[1], ЉУБИША КОЦИЌ[2]

Апстракт. Во трудов разгледуваме афини пресликувања дефинирани на афини простори, и специјално на реалниот афин простор $\mathbb{A}^m$. Ја даваме нивната матрична репрезентација преку реална колонично-стохастичка матрица. Покажуваме дека секоја линеарна трансформација дефинирана на $\mathbb{R}^m$ може да се разгледува како афина трансформација дефинирана на $\mathbb{A}^m$. Покажуваме важна особина - своевидна комутативност на композиција на афини пресликувања.

1. Вовед

Дефинициите од воведот се воглавно превземени од [3].

Дефиниција 1.1. Афин простор е тројката $\langle E, \overrightarrow{E}, +\rangle$, каде што E е непразно множество од точки, $\overrightarrow{E}$ е векторски простор, а $+ : E \times \overrightarrow{E} \to E$ е операција која ги задоволува следниве релации:

(A1) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, за секоја $\mathbf{a} \in E$.

(A2) $(\mathbf{a} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = \mathbf{a} + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$, за секоја $\mathbf{a} \in E$, за секои $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \overrightarrow{E}$.

(A3) За произволни две точки $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ постои единствен вектор $\mathbf{u} \in \overrightarrow{E}$, така што $\mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{b}$.

Под **димензија на афиниот простор** $\langle E, \overrightarrow{E}, +\rangle$ ќе ја подразбираме димензијата на векторскиот простор $\overrightarrow{E}$.

Празното множество, по дефиниција е афин простор.

Единствениот вектор $\mathbf{u} \in \overrightarrow{E}$ од (A3) се означува со $\mathbf{ab}$ или пак $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Па така, може да се запише

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{ab} \text{ или } \mathbf{b} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14R10, 65D17.
Key words and phrases. афин простор, афина база, афино пресликување, матрично претставување, комутативност.

Ако на произволна точка $\mathbf{a} \in E$ и' доделиме улога на координатен почеток, тогаш постои биекција $f : E \to \overrightarrow{E}$ дефинирана со $f(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}, \forall \mathbf{b} \in E$, која ни овозможува E да го идентификуваме со $\overrightarrow{E}$. На тој начин, на афиниот простор $\langle E, \overrightarrow{E}, + \rangle$ му се доделува векторска структура, со можност за слободен избор на координатниот почеток. Кога ќе се направи избор за координатен почеток, на пример $\mathbf{a}$, тогаш ќе сметаме дека E е векторски простор.

Пример 1.1. Секој векторски простор $\overrightarrow{E}$ е и афин простор, ако се избере $E = \overrightarrow{E}$, а операцијата "+" да е операцијата собирање вектори. Специјално, афиниот простор $\langle \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m, + \rangle$ се означува со $\mathbb{A}^m$ и се нарекува **реален афин простор со димензија** m.

За произволна фамилија точки $\{\mathbf{a}_i\}_{i \in I}$ од E, за произволна фамилија од скалари $\{\lambda_i\}_{i \in I}$, такви што $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i = 1$, точката $\mathbf{a} + \sum\limits_{i \in I} \lambda_i \mathbf{a}\mathbf{a}_i$ не зависи од изборот на $\mathbf{a} \in E$ ([3]). Оваа точка се нарекува **афина (или барицентрична) комбинација на точките $\mathbf{a}_i$ со тежини** λ_i, и се означува со $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i \mathbf{a}_i$.

Лема 1.1. Нека $(\mathbf{a}_i)_{i \in I}$ е фамилија точки од афиниот простор $\langle E, \overrightarrow{E}, + \rangle$. Ако фамилијата вектори $(\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j)_{j \in I \setminus \{i\}}$ е линеарно независна за некое $i \in I$, тогаш е линеарно независна за секое $i \in I$.

Дефиниција 1.2. Фамилијата точки $(\mathbf{a}_i)_{i \in I}$ од афиниот простор $\langle E, \overrightarrow{E}, + \rangle$ е **афино независна** ако фамилијата од вектори $(\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j)_{j \in I \setminus \{i\}}$ е линеарно независна за некое $i \in I$. Фамилијата од точки $(\mathbf{a}_i)_{i \in I}$ од E е **афино зависна**, ако не е афино независна.

Дефиниција 1.3. Во даден m-димензионален афин простор $\langle E, \overrightarrow{E}, + \rangle$ **афина база со координатен почеток $\mathbf{a}_{m+1}$** е фамилијата $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1})$ од $m + 1$ - на точка од E, таква што векторите $(\mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_m)$ се база во $\overrightarrow{E}$. (Афината база со координатен почеток $\mathbf{a}_{m+1}$ може да се претстави и како пар $(\mathbf{a}_{m+1}, (\mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_m))$). Тогаш за секој $\mathbf{x} \in E$ постои единствена фамилија скалари $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, така што $\mathbf{x}$ може да се претстави како

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_{m+1} + x_1 \mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_1 + \ldots + x_m \mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_m.$$

Скаларите $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ги викаме **координати на x во однос на афината база** $(\mathbf{a}_{m+1}, (\mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_m))$. Понатаму, секој $\mathbf{x} \in E$ може да се запише како

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_m \mathbf{a}_m + \lambda_{m+1} \mathbf{a}_{m+1}$$

каде $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1})$ е единствена фамилија скалари, за кои важи дека $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$, и кои се нарекуваат **барицентрични координати на x во однос на афината база** $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1})$.

Координатите $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и афините координати $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1})$ се поврзани со релациите $\lambda_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\lambda_{m+1} = 1 - \sum_{i=1}^{m} x_i$.

Специјално, ако една точка - вектор од $\mathbb{R}^m$ има координати $(x_1, \dots, x_m)$ во однос на векторската база $(\mathbf{a}_{m+1}, (\mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_m))$, тогаш тие се совпаѓаат со координатите на точката во однос на афината база $(\mathbf{a}_{m+1}$, $(\mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m+1}\mathbf{a}_m))$, а афините координати на таа точка во однос на истата афина база се $(x_1, \dots, x_m, 1 - \sum_{i=1}^{m} x_i)$.

2. Некои особини на афините пресликувања во $\mathbb{A}^m$

Дефиниција 2.1. Нека се дадени два афини простори, $\langle E, \overrightarrow{E}, + \rangle$ и $\langle E', \overrightarrow{E'}, +' \rangle$. $f : E \to E'$ е **афино пресликување** ако за секоја фамилија од тежински точки $((\mathbf{a}_i, \lambda_i))_{i \in I}$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, важи

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{a}_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(\mathbf{a}_i)$$

Со други зборови, пресликувањето $f : E \to E'$ е афино, ако ги запазува афините комбинации.

Понатаму ќе разгледуваме само афини пресликувања, кои се дефинирани на реалниот афин простор, и кои се афтоморфизми.

Забелешка. За да биде едно афино пресликување дефинирано, доволно е да се познати сликите на точките од афината база.

Дефиниција 2.2. Матрицата $S = [s_{ij}]$ е **колонично стохастичка**, ако збирот на елементите од секоја нејзина колона е 1.

Во следнава теорема ќе покажеме дека секое афино пресликување има своја матрична репрезентација преку квадратна реална колонично-стохастичка матрица. Заради матричната репрезентација, оправдана е ознаката $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{m+1} \end{bmatrix}$ за афините координати.

Теорема 2.1. Секое афино пресликување $f : \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$ има матрична репрезентација преку реална колонично-стохастичка квадратна матрица од ред $(m+1)\times(m+1)$. И обратно, секоја реална колонично-стохастичка матрица дефинира афино пресликување во E.

Доказ. Нека $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1})$ е афина база во $\mathbb{A}^m$ и нека афиното пресликување f е зададено со

$$f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{1}$$

Бидејќи $\mathbf{a}_i$ е точка од базата, нејзините афини координати се од облик $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, при што елементот 1 е на i-тата позиција. Нека афините координати на точката $\mathbf{b}_i = f(\mathbf{a}_i)$ се $(s_{1i}, s_{2i}, \ldots, s_{m+1,i})$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, при што мора да важи $\displaystyle\sum_{j=1}^{m+1} s_{ji} = 1$. Равенството (1) може да се запише во обликот

$$f(\mathbf{a}_i) = s_{1i}\mathbf{a}_1 + s_{2i}\mathbf{a}_2 + \ldots + s_{m+1,i}\mathbf{a}_{m+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m+1, \tag{2}$$

односно во обликот

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} s_{1i} \\ s_{2i} \\ \vdots \\ s_{m+1,i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{3}$$

Последново е еквивалентно на

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = S \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\mathbf{a}_i) = S\mathbf{a}_i, \tag{4}$$

каде што $S = [s_{ij}]_{i,j=1}^{m+1}$. S е реалната колонично-стохастичка матрица која го претставува пресликувањето f.

Обратно, нека е дадена реална колонично стохастичка матрица S. Со равенството

$$\mathbf{a}_i \mapsto S\mathbf{a}_i \tag{5}$$

е зададено пресликување, за кое со елементарни матрични калкулации може да се покаже дека за произволна (најмногу преброива) тежинска фамилија од точки $(\mathbf{c}_i, \lambda_i)$, важи $S \cdot \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{c}_i \right) = \sum_{i \in I} \lambda_i (S \cdot \mathbf{c}_i)$, што ќе значи дека пресликувањето дефинирано со (5) е афино. $\square$

Дефиниција 2.3. Афината база која што соодветствува на стандардната векторска база во $\mathbb{R}^m$, $(\mathbf{O}, (\mathbf{Oe}_1, \mathbf{Oe}_2, \ldots, \mathbf{Oe}_m))$, ќе ја викаме **стандардна афина база**.

Во стандардната афина база точката $\mathbf{O}$ ќе ја означуваме со $\mathbf{e}_{m+1}$, односно стандардна афина база ќе ни биде $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$. Според дискусијата после дефиницијата 1.3, ако точката $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ има декартови координати $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, тогаш нејзините афини координати во однос на стандардната афина база ќе бидат $(x_1, \ldots, x_m, 1 - \sum_{i=1}^{m} x_i)$, или во матричен облик,

$$\left[\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{1}^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \hline 1 \end{array} \right],$$

каде што E_m е единичната матрица од ред m.

Теорема 2.2. Нека $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, каде што A е реална квадратна матрица од ред m, а $\mathbf{b}$ е вектор-колона од ред m, е линеарна трансформација во $\mathbb{R}^m$, при што координатите на векторите се во однос на стандардната векторска база. Ако f го разгледуваме како пресликување во просторот $\mathbb{A}^m$ со стандардната афина база, тогаш тоа е афино пресликување, при што колонично-стохастичката матрица која го претставува f има облик

$$S = Q_m \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] Q_m^{-1}, \quad \text{каде што} \quad Q_m = \left[\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{1}^T & 1 \end{array} \right]. \tag{6}$$

Доказ. За да колонично-стохастичката матрица S соодветствува на пресликувањето f, треба секоја точка од обликот $\left[\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{1}^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \hline 1 \end{array} \right]$ да ја трансформира во точка $\left[\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{1}^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{Ax} + \mathbf{b} \\ \hline 1 \end{array} \right]$, односно треба да важи:

$$S \left[\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{1}^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \hline 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{1}^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} A\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \hline 1 \end{array} \right]. \tag{7}$$

Последново равенство може да го запишеме во облик

$$SQ_m \left[\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \hline 1 \end{array} \right] = Q_m \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \hline 1 \end{array} \right].$$

Бидејќи ова треба да важи за секој $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, следува дека

$$SQ_m = Q_m \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right],$$

што е еквивалентно со равенството (6). Вака добиената матрица S, е квадратна, реална и колонично-стохастичка, па според претходната теорема, дефинира афино пресликување. □

Забелешка. Експлицитниот облик на матрицата S изразена преку елементите на матрицата A и векторот $\mathbf{b}$, е:

$$S = \begin{bmatrix} b_1 + a_{11} & b_1 + a_{12} & \dots & b_1 + a_{1m} \\ b_2 + a_{21} & b_2 + a_{22} & \dots & b_2 + a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m + a_{m1} & b_m + a_{m2} & \dots & b_m + a_{mm} \\ 1 - \sum_{i=1}^{m}(b_i + a_{i1}) & 1 - \sum_{i=1}^{m}(b_i + a_{i2}) & \dots & 1 - \sum_{i=1}^{m}(b_i + a_{im}) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Да напоменеме дека од интерес на нашата работа се само недегенеративни афини пресликувања. Исто така, од практичен интерес ни е да сметаме дека афините пресликувања се еднозначно определени со колонично-стохастичката матрица од теорема 2.1, без оглед на базата на афиниот простор. Всушност, не се врзуваме за базата, туку се врзуваме за трансформацијата: транслација, ротација, хомотетија, накосување. Може и да ги нарекуваме, **афини пресликувања независни од афината база**. Така на пример, ако $(\mathbf{a}_i)_{i=1}^{m+1}$ е база во $\mathbb{A}^m$, тогаш координатите на $f(\mathbf{a})$ (каде што $\mathbf{a}$ е произволна точка од $\mathbb{A}^m$), во однос на базата $(\mathbf{a}_i)_{i=1}^{m+1}$, ќе бидат исти со координатите на $f(f(\mathbf{a}))$ во однос на базата $(f(\mathbf{a}_i))_{i=1}^{m+1}$. (Последнава фамилија е база, бидејќи f е недегенеративно.)

Теорема 2.3. Ако барем едно од афините пресликувања f или g дефинирани на $\mathbb{A}^m$ е независно од афината база, тогаш f и g комутираат меѓу себе.

Доказ. Нека $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1})$ е афина база во $\mathbb{A}^m$. Нека пресликувањето f е независно од афината база, со колонично-стохастичка матрична репрезентација S. Тоа значи дека

$$f(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i = s_{1i}\mathbf{a}_1 + s_{2i}\mathbf{a}_2 + \ldots + s_{m+1,i}\mathbf{a}_{m+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m+1.$$

Нека g е дадено со $g(\mathbf{a}_i) = \mathbf{c}_i$, $i = 1, 2, \dots, m+1$. Тогаш, за произволно $i \in \{1, 2, \dots, m+1\}$ важи

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\mathbf{a}_i) &= g(\mathbf{b}_i) = g(s_{1i}\mathbf{a}_1 + s_{2i}\mathbf{a}_2 + \ldots + s_{m+1,i}\mathbf{a}_{m+1}) = \\ &= s_{1i}g(\mathbf{a}_1) + s_{2i}g(\mathbf{a}_2) + \ldots + s_{m+1,i}g(\mathbf{a}_{m+1}) = \\ &= s_{1i}\mathbf{c}_1 + s_{2i}\mathbf{c}_2 + \ldots + s_{m+1,i}\mathbf{c}_{m+1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Од друга страна пак, бидејќи f е независно од афината база,

$$(f \circ g)(\mathbf{a}_i) = f(\mathbf{c}_i) = s_{1i}\mathbf{c}_1 + s_{2i}\mathbf{c}_2 + \ldots + s_{m+1,i}\mathbf{c}_{m+1}.$$

Значи $(f \circ g)(\mathbf{a}_i) = (g \circ f)(\mathbf{a}_i)$ во однос на базата $(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m, \mathbf{c}_{m+1})$. Ова својство важи за секоја точка од афината база, значи ќе важи и за сите точки од $\mathbb{A}^m$. □

Својствата на афините пресликувања и афините простори воопшто, дадени во теоремите 2.1, 2.2 и 2.3., имаат не само важна, туку и широка примена. Една од поважните области на примена е геометриско моделирање и компјутерска графика ([4]) со акцент на генерирање полиномни и сплајнови криви и површини со слободна форма. Освен "глатки" објекти, можна е и примена во моделирањето на фрактални објекти, со кое се занимава дисертацијата [1]. Токму овој момент на можна примена на истиот метод на генерирање класични и фрактални геометриски форми им дава на афините трансформации посебна тежина. Основите за така ориентирана примена на афините трансформации се поставени во [8] и [9]. Понатамошни теориски истражувања во таа насока се спроведени во [2], [5] и [7]. Следна примена на афините автоморфизми е кај таканаречените "L-системи" кои се воведени од страна на Lindenmayer и Prusinkiewicz ([6]). Во врска со ова, во [6] е покажано отсуство на афина инваријантност на L - системите. Следна важна примена е поврзана со итеративните методи за решавање на систем од линеарни равенки, а конкретно за Јакобиевиот метод и методот на Гаус-Зајдел.

3. Заклучок

Во трудов е најдена матрична репрезентација во форма на реална колонично-стохастичка матрица на афино пресликување дефинирано на реалниот афин простор $\mathbb{A}^m$. На тој начин овозможуваме линеарна трансформација дефинирана на $\mathbb{R}^m$ да се разгледува како афина трансформација дефинирана на $\mathbb{A}^m$. Теоремата 2.2 ја дава врската помеѓу матриците што ги дефинираат линеарната трнасформација и соодветната афина трансформација. Покажано е едно важно својство на афините трансформации, своевидна "комутативност", од особена важност при геометриското моделирање базирано на афини трансформации.

References

[1] Бабаче, Е., *Прилози кон итеративни функциски системи со афина инваријантност*, докторска теза, Природно-математички факултет, Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Скопје, Р Македонија (2009).

[2] Babače, E., Kocić , Lj. M., *Minimal Simplex for IFS Fractal Sets*, NAA 2008, Lecture Notes in Computer Science 5434, pp.168-175, Eds.: S. Margenov, L. G. Vulkov, J. Wasniewski, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009).

[3] Gallier J., *Geometric Methods and Applications For Computer Science and Engineering*, Springer - Verlag, TAM Vol.38 (2000).

[4] Goldman R., Schaefer S., Ju T.,*Turtle Geometry in Computer Graphics and Computer-Aided Design*, CAD 36 (2004), 1471-1482.

[5] Kocić, Lj. M., Gegovska-Zajkova, S. and Babache, E., *Orthogonal decomposition of fractal sets*, In: W. Gautschi et al. (eds.), Approximation and Computation: In Honor of Gradimir V. Milovanovic', Springer Optimization and Its Applications 42, Springer Science+Business Media, LLC 2011. Math. Subj. Class.(2000) 28A80, 65D17.

[6] Lj. M. Kocić and M. Rafailović, *Affine Invariant L-systems*, Krag. J. Math., Vol 34, (2010), 31-41.

[7] Kocić, Lj. M., Simoncelli, A.C., *Cantor Dust by AIFS*, FILOMAT (Nis) **15**, 265-276. Math. Subj. Class.(2000) 28A80 (65D17) (2001).

[8] Kocić, Lj. M., Simoncelli, A.C., *Towards free-form fractal modelling*, In: Mathematical Methods for Curves and Surfaces II, M. Daehlen, T. Lyche and L. L. Schumaker (eds.), pp. 287-294, Vanderbilt University Press, Nashville (TN.) Math. Subj. Class.(1991) 65D17, 28A80; MR 99d: 94k:65064 (1998).

[9] Kocić, Lj. M., Simoncelli, A.C., *Stochastic approach to affine invariant IFS*, In: Prague Stochastics'98 (Proc. 6th Prague Symp., Aug. 23-28, M. Hruskova, P. Lachout and J.A. Visek eds), Vol II, Charles Univ. and Academy of Sciences of Czech Republic, Union of Czech Mathematicians and Physicists, Prague 1998. Math. Subj. Class.(1991) 28A80 (1998).

ON SOME AUTOMORPHISMS ON THE AFFINE SPACES

Elena Hadzieva, Ljubiša Kocić

Summary

This paper deals with the affine mappings defined on affine space, especially on the real affine space $\mathbb{A}^m$. Their matrix representation in the form of real column-stochastic matrix is given. We show that every linear mapping defined on $\mathbb{R}^m$ can be observed as an affine mapping defined on $\mathbb{A}^m$. We also show an important property - a special commutativity of the composition of two affine mappings.

[1] University "Ss Cyril and Methodius"
Faculty of Electrical Engineering and Information Technologies
Karpos 2, P.O.Box 574, 1000 Skopje
Republic of Macedonia

E-mail address: hadzieva@feit.ukim.edu.mk

[2] University of Niš
Faculty of Electronic Engineering,
P.O. Box 73, 18 000 Niš, Republic of Serbia

E-mail address: ljubisa.kocic@elfak.ni.ac.yu