Математички Билтен ISSN 0351–336X
27 (LIII)
2003 (99–106)
Скопје, Македонија

ЗА ЕДНА ПОТКЛАСА НЕАНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ ЧИЕШТО ОТСТАПУВАЊЕ ОД АНАЛИТИЧНОСТ Е ПРОПОРЦИОНАЛНО СО НИВНАТА КОМПЛЕКСНО КОНЈУГИРАНА ВРЕДНОСТ

Борко Илиевски

Апстракт

Во оваа работа се определени неаналитички функции $w = w(z)$, преку една од формулите (7), (9) или (15), чиешто отстапување од аналитичност е пропорционално на нивната комплексно конјугирана вредност со коефициент на пропорционалност линеарна функција од z.

Вовед

А. Билимовиќ операторот B, дефиниран со

$$B(w) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1}$$

го наречува мерка на отстапување од аналитичност на комплексната функција $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по комплексната променлива $z = x + iy$ [1].

С. Фемпл во трудовите [2], [3] и [4] ги определува неаналитичките функции $w = w(z)$ чиешто прво, второ, односно n-то отстапување од аналитичност е аналитичка функција, како решенија на равенката

$$B_n(w) = f(z), \tag{2}$$

во случај $n=1$, $n=2$ и произволно $n\in\mathbf{N}$ соодветно. Притоа

$$B_n = B(B_{n-1}), \quad n=2,3,\dots \quad \text{и} \quad B_1 = B. \tag{3}$$

Една половина од мерката на отстапувањето од аналитичност (1) т.е. изразот

$$\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\Big(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big]=\frac{\hat{d}w}{d\overline{z}}, \tag{4}$$

во монографијата [5] на Г. Н. Положий, се сретнува под името оперативен извод по $\overline{z}=x-iy$ (или ареоларен извод) на компелксната функција $w(z)=u+iv$.

Треба да забележиме дека во случај на т.н. ареоларни равенки од прв ред

$$\frac{\hat{d}w}{d\overline{z}}=f(z,w) \tag{5}$$

со десна страна $f=f(z,w)$ аналитичка во однос на непознатата функција $w=w(z)$ (што е еквивалентно со фактот да во равенката (5) непознатата функција $w=w(z)$ не се јавува под знакот на комплексна конјугација) постои комплетна аналогија со обичните диференцијални равенки во смисла на нивно квадратурно решавање. Аналогиите престануваат во случај кога десната страна $f=f(z,w)$ не е аналитичка функција во однос на w (што е еквивалентно со фактот да во равенката (5) непознатат функција $w=w(z)$ експлицитно ја има под знакот на комплексна конјугација).

Во трудот [6], со метод на ареоларни редови, најдовме дека ареоларната равенка

$$\frac{\hat{d}w}{d\overline{z}}=\lambda z\overline{w} \qquad (\lambda\in\mathbf{C}) \tag{6}$$

има решение

$$\begin{aligned} w=&\phi(z)+\lambda z\int\overline{\phi}(z)\,d\overline{z}\\ &+z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}}{2^n\,n!}\Big[\overline{z}^{2n}\underbrace{\int z\,dz\int z\,dz\cdots\int z\,dz\int}_{n-\text{интеграли}}\phi(z)dz\\ &+\lambda z^{2n}\underbrace{\int\overline{z}\,d\overline{z}\int\overline{z}\,d\overline{z}\cdots\int\overline{z}\,d\overline{z}\int}_{n+1-\text{интеграли}}\overline{\phi}(z)\,d\overline{z}\Big]\end{aligned} \tag{7}$$

при што $\phi = \phi(z)$ е произволна аналитичка функција во улога на интеграциона константа.

Во оваа работа го поставуваме следниот проблем: Дали е можна сумација на редот во формулата (7) т.е., со други зборови, дали е можно решението (7) на ареоларната равенка (6) да се запише во поконцизна форма?

Со помош на формулата

$$\underbrace{\int z\,dz \int z\,dz \cdots \int z\,dz \int \phi(z)dz}_{n-\text{интеграли}} = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{(z-\zeta)^{2n-2}}{(2n-2)!!}\phi(\zeta)\,d\zeta & n \geq 2 \\ \displaystyle\int \phi(\zeta)\,d\zeta, & n = 1, \end{cases} \tag{8}$$

а во чија веродостојност лесно се увeруваме, решението (7) на ареоларната равенка (6) го запишуваме во облик

$$\begin{aligned} w =& \phi(z) + \lambda z \int \overline{\phi}(z)\,d\overline{z} \\ &+ z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2n}}{2^n\, n!}\Big[\overline{z}^{2n} \int \frac{(z-\zeta)^{2n-2}}{(2n-2)!!}\phi(\zeta)\,d\zeta \\ &+ \lambda z^{2n} \int \frac{(\overline{z}-\overline{\zeta})^{2n}}{(2n)!!}\overline{\phi}(\zeta)\,d\overline{\zeta}\Big] \end{aligned}$$

или по извесно преуредување-средување, во облик

$$\begin{aligned} w =& \phi(z) + \lambda z \int \overline{\phi}(z)\,d\overline{z} \\ &+ z\Big\{\int \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2n}\overline{z}^{2n}(z-\zeta)^{2n-2}}{(2n)!!(2n-2)!!}\Big]\phi(\zeta)\,d\zeta \\ &+ \lambda \int \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2n} z^{2n}(\overline{z}-\overline{\zeta})^{2n}}{[(2n)!!]^2}\Big]\overline{\phi}(\zeta)\,d\overline{\zeta}\Big\} \end{aligned} \tag{9}$$

За вториот ред во (9), чијашто конвергентност во конечната комплексна z-рамнина лесно се покажува со Даламберовиот критериум, имаме

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{2n}}{[(2n)!!]^2}, \quad \text{при што} \quad u = |\lambda| z(\overline{z} - \overline{\zeta}). \tag{10}$$

Понатаму

$$\frac{dS}{du}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\,u^{2n-1}}{[(2n)!!]^2}$$

$$u\frac{dS}{du}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\,u^{2n}}{[(2n)!!]^2}$$

$$\frac{d}{du}\left(u\frac{dS}{du}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2\,u^{2n-1}}{[(2n)!!]^2}=u\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{2n-2}}{[(2n-2)!!]^2}=u(S+1),$$

од каде што добивме обична диференцијална равенка по $S=S(u)$:

$$uS''+S'-u(S+1)=0. \tag{11}$$

Со смена $S+1=T$, каде што $T=T(u)$ е нова непозната функција, претходната обична диференцијална равенка се трансформира во хомогена линеарна диференцијална равенка од втор ред

$$uT''+T'-uT=0. \tag{12}$$

Диференцијалната равенка (12), согласно Камке [8] стр 401, има решение

$$T=\mathcal{Z}_0(iu),$$

при што $\mathcal{Z}_0$ е т.н. цилиндрична функција од нулти ред. Согласно воведената смена $S+1=T$, диференцијалната равенка (11) има решение

$$S=\mathcal{Z}_0(iu)-1,$$

а согласно (10) вториот ред во формулата (9) има сума

$$S=\mathcal{Z}_0\big(i\,|\lambda|z(\overline{z}-\overline{\zeta})\big)-1. \tag{13}$$

Што се однесува до првиот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\overline{z}^{2n}(z-\zeta)^{2n-2}}{(2n)\cdot(2n-2)!!}=R$$

во (9), имаме

$$\frac{\hat{d}R}{d\overline{z}}=\frac{\partial R}{\partial\overline{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\overline{z}^{2n-1}(z-\zeta)^{2n-2}}{[(2n-2)!!]^2}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{1}{\overline{z}}\,\frac{\hat{d}R}{d\overline{z}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^2[|\lambda|\overline{z}(z-\zeta)]^{2n-2}}{[(2n-2)!!]^2}\\ &= |\lambda|^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{[\,|\lambda|z(\overline{z}-\overline{\zeta})\,]}^{2n-2}}{[(2n-2)!!]^2}\\ &= |\lambda|^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{u}^{2n-2}}{[(2n-2)!!]^2}\\ &= |\lambda|^2\overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{2n-2}}{[(2n-2)!!]^2}\right)} = |\lambda|^2(\overline{S}+1),\end{aligned}$$

од каде што

$$\frac{\hat{d}R}{d\overline{z}} = |\lambda|^2\overline{z}\,\overline{Z_0[i|\lambda|z(\overline{z}-\overline{\zeta})]},$$

односно

$$R = |\lambda|^2\widehat{\int}\overline{z}\,\overline{Z_0[i|\lambda|z(\overline{z}-\overline{\zeta})]}\,d\overline{z}. \tag{14}$$

Конечно, имајќи ги предвид формулите (13) и (14) како и формулата (8), решението (9) на ареоларната равенка (6) добива облик

$$\begin{aligned} w = &\phi(z) + \lambda z\int Z_0[i|\lambda|z(\overline{z}-\overline{\zeta})]\overline{\phi}(\zeta)\,d\overline{\zeta}\\ &+ |\lambda|^2 z\int\Big[\widehat{\int}\overline{z}\,\overline{Z_0[i|\lambda|z(\overline{z}-\overline{\zeta})]}\,d\overline{z}\Big]\phi(\zeta)\,d\zeta.\end{aligned} \tag{15}$$

Конечно, согласно врската

$$B = 2\,\frac{\hat{d}}{d\overline{z}} \tag{16}$$

што постои меѓу операторот B на Билимовиќ и ареоларниот извод $\dfrac{\hat{d}}{d\overline{z}}$, ареоларната равенка (6) се запишува во облик

$$B(w) = 2\lambda z\,\overline{w}. \tag{17}$$

Теорема. *Функциите $w = w(z)$ определен со една од формулите (7), (9) или (15) се неаналитички функции чиешто отстапување од аналитичност е пропорционално со нивната комплексно конјугирана* *вредност со коефициент на пропорционалност линеарна функција* $k = 2\lambda z$ *од* z.

Забелешка 1. Ареоларната равенка

$$\frac{\hat{d}w}{d\overline{z}} = (az+b)\overline{w} \qquad (a, b \in \mathbf{C}) \tag{18}$$

со смената

$$\zeta = az + b$$

се трансформира во ареоларна равенка (6) по непозната функција $w = w(\zeta)$.

Навистина, од горната смена и операционите правила за ареоларните изводи имаме

$$\begin{aligned}\frac{\hat{d}w}{d\overline{z}} &= \frac{\hat{d}w}{d\zeta}\,\frac{\hat{d}\zeta}{d\overline{z}} + \frac{\hat{d}w}{d\overline{\zeta}}\,\frac{\hat{d}\overline{\zeta}}{d\overline{z}} \\ &= \frac{\hat{d}w}{d\zeta}\cdot 0 + \overline{\left(\frac{\hat{d}\zeta}{dz}\right)}\,\frac{\hat{d}w}{d\overline{\zeta}} \\ &= \overline{a}\,\frac{\hat{d}w}{d\overline{\zeta}}\end{aligned}$$

поради што равенката (17) се сведува на

$$\overline{a}\,\frac{\hat{d}w}{d\overline{\zeta}} = \zeta\,\overline{w}$$

т.е. на

$$\frac{\hat{d}w}{d\overline{\zeta}} = \lambda\zeta\,\overline{w} \qquad \left(\lambda = \frac{1}{\overline{a}}\right).$$

Забелешка 2. Согласно Г. Н. Положий функциите $w = w(z)$, определени со која било од формулите (7), (9) или (15) се обопштени аналитички функции од трета класа со карактеристика $\mu = \lambda z$.

Забелешка 3. Лесно се покажува дека ареоларната равенка (6) е комплексен запис на системот парцијални диференцијални равенки

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2[(\alpha x - \beta y)u + (\beta x + \alpha y)v] \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2[(\beta x + \alpha y)u - (\alpha x - \beta y)v] \end{cases} \tag{19}$$

по непознати реални функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ од две реални променливи x и y. Поради ова

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re} w \\ v = \operatorname{Im} w, \end{cases}$$

каде $w = w(z)$ е определена со една од формулите (7), (9) или (15), е решение на системот (19).

Литература

[1] A. Bilimović: *Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique par rapport á une fonction analytique*, C.R. Acad. Sci. Paris, 237 (1953), 694.

[2] С. Фемпл: *О неаналитичким функцијама чије је одступање од аналитичности аналитичка функција*, ГЛАС CCLIV – Одељење природно математичких наука, књ. 24, Београд, 1963.

[3] С. Фемпл: *О неаналитичким функцијама чије је друго одступање од аналитичности аналитичка функција*, Билтен ДМФ СР Србије, V. XV, 1-4, Београд, 1963.

[4] С. Фемпл: С. Фемпл: *Ареаларни полиноми као класа неаналитичких функција чији су реални и имагинарни делови полихармониске функције*, Матем. весник, књ. 1 (16), Београд, 1964.

[5] Г. Н. Положий: *Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного, p-аналитические и (p, q)-аналитические фунции и некоторые их применения*, Киев, 1965.

[6] B. Ilievski: *On $(r + is)$-analytical functions with linear characteristic function*, Bulletin de la sociètè des mathem. et des informatic. de R. Macédoine, Skopje, 1994.

[7] Б. Илиевски: *Dve koncizni formi na reshenieto na osnovnata ravenka Vekua*, Математички билтен, Сојуз на математичари на Р. Македонија, Скопје, 2003.

[8] Э. Камке: *Спровочник*, IV издание, Москва, 1971.

ABOUT ONE SUBCLASS OF NONANALYTIC FUNCTIONS WHICH DESAGREEMENT OF ANALYCITY IS PROPORTIONAL TO IT'S COMPLEX CONJUGATE VALUE

Borko Ilievski

Summary

In this work we determine nonanalytical functions $w = w(z)$, via one of the formulas (7), (9) or (15), which desagreenent from analycity is proporcional to it's complex conjugate value with coeficient of proportionality is a linear function of z.

University "St. Kiril and Metodij"
Institute of Mathematics
P.O. Box 162
1000 Skopje
Republic of Macedonia