Математички Билтен
16 (XLII)
1992 (91-97)
Скопје, Македонија

BLOK DIZAJNI I [n,n+m]-REŠETKE

Alija Mandak

Abstract. U radu se proučava veza izmedju blok dizajna i [n,n+m]-rešetaka i dokazuje da su [n,n+m]-rešetke blok dizajni ako i samo ako je n=2, m=q-1. Za konačne [n,n+m]-rešetke daje se ograničenje za broj paralelnih klasa r=m+n.

1. Uvod. Prvo uvodimo neke osnovne definicije i oznake koje ćemo kasnije koristiti.

Struktura incidencije je trojka $D=(V,B,I)$ gde su V i B dva disjunktna skupa a $I \subseteq V \times B$.

Elementi skupa V zovu se tačke, a skupa B blokovi. Umesto $(P,b) \in I$, $P \in V$, $b \in B$, često pišemo PIb i upotrebljavamo obične geometrijske izraze: „Tačka P pripada bloku b", „blok b prolazi kroz tačku P", „P i b su incidentni" itd.

Definicija 1.1. Za strukturu incidencije $D=(V,B,I)$ kaže se da je rešiva ako postoji razbijanje skupa blokova $B=B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$ tako da kroz svaku tačku $P \in V$ prolazi tačno jedan blok $b_i \in B_i$ za svako $i=1,\ldots,m$. Za $B_1, B_2, \ldots, B_m$ kaže se da su klase paralelnosti.

Definicija 1.2. Rešiva struktura incidencije $D=(V,B,I)$ gde je $B=B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{n+m}$, $n > 2$, $m > 1$, zove se n-dimenzionalna n+m-rešetka (ili prosto [n,n+m]-rešetka) ako za svaku injekciju $\phi: N_n$[1] $\to N_{n+m}$ i svako $b_s \in B_{\phi(s)}$, $s=1,2,\ldots,n$, postoji tačno jedna tačka $P \in V$ tako da je PIb_s za sve $s \in N_n$.

Dobro je poznato (vidi [1]) da postoji ekvivalencija izmedju teorije [n,n+m]-rešetaka i [n,m]-kvazigrupa.

Definicija 1.3. Konačna struktura incidencije $D=(V,B,I)$ zove se blok dizajn sa parametrima (v,k,λ), $v,k,\lambda \in N$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

---
[1] $N_n=\{1,2,\ldots,n\}$

i) $|V| = v$

ii) Kroz bilo koje dve tačke prolazi tačno λ blokova

iii) Svaki blok sadrži isti broj tačaka k.

Blok dizajn sa parametrima (v,k,λ) obeležava se sa $S_\lambda(2,k,v)$. Ako je $\lambda = 1$ onda se piše prosto $S(2,k,v)$.

Definicija 1.4. Rešiva struktura incidencije $D=(V,B,I)$ zove se afin dizajn ako svaki blok sadrži isti broj tačaka (ako svaki blok ima istu dužinu) i ako se bilo koja dva neparalelna bloka seku u μ tačaka.

2. Neki osnovni rezultati. Izložićemo neke poznate rezultate koji su potrebni za dokaz teoreme 1.3.

Sve klase paralelnih blokova $B_1,\ldots,B_{n+m}$ jedne $[n,n+m]$-rešetke imaju isti broj blokova q. Bilo koja dva neparalelna bloka seku se u q^{n-2}-tačaka. Dužina blokova je q^{n-1}.

Takodje dobro je poznato da je svaki blok dizajn $S_1(2,q,q^2)$ afina ravan reda q.

Ako je s-broj blokova jedne klase paralelnih blokova, r-broj klasa paralelnih blokova jednog afinog dizajna $D=(V,B,I)$ tada

$$|V| = v = s^2\mu, \quad k = s\mu, \quad |B| = b = sr.$$

Dakle kojeficijenti (s,r,μ) potpuno odredjuju afin dizajn koji se obeležava sa $S_r(1,s\mu,s^2\mu)$.

Iz definicije $[n,n+m]$-rešetki i iz gore izloženog sledi da je svaka $[n,n+m]$-rešetka afin dizajn sa kojeficijentima

$$(q,n+m,q^{n-2}),\ k=q^{n-1},\ b=(n+m)\cdot q,\ \text{t.j. } S_{n+m}(1,q^{n-1},q^n).$$

Sledeća teorema karakteriše blok dizajne pomoću afinih dizajna.

Teorema 2.1. (Jungnickel 1978) Ako je $D=(V,B,I)$ afin dizajn $S_r(1,q\mu,q^2\mu)$ onda

$$r \le (q^2\mu-1)/(q-1).$$

Jednakost važi ako i samo ako D je blok dizajn.

3. Sledeća teorema karakteriše $[n,n+m]$-rešetke pomoću blok dizajna i obratno što je glavni rezultat ovog rada.

Teorema 3.1. $[n,n+m]$-rešetka $D=(V,B,I)$, $B=B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{n+m}$, je blok dizajn ako i samo ako je $n=2$, $m=q-1$[1]. Parametri (v,k,λ) tog dizajna su $v=q^n=q^2$, $\lambda=1$, $k=q$, t.j. taj dizajn je konačna afina ravan.

Dokaz. Kako svaki blok konačne $[n,n+m]$-rešetke sadrži $k=q^{n-1}$ tačaka i svaka klasa B_i, $i=1,\ldots,n+m$, ima q-blokova, sledi da je ukupan broj tačaka $|V|=v=q^n$. Dakle za svaku konačnu $[n,n+m]$-rešetku važe uslovi i) i iii) iz definicije blok dizajna. Ostaje ispitati uslov ii). Neka je $D=(V,B,I)$; $B=B_1 \cup \ldots \cup B_{n+m}$, konačna $[n,n+m]$-rešetka gde je $|B_i|=q$, $i=1,2,\ldots,n+m$, $|V|=q^n$, $b=k=q^{n-1}$ za bilo koji blok $b \in B$. Sve blokove klase B_i označe se sa $b_i^1, b_i^2, \ldots, b_i^q$, $i=1,\ldots,n+m$ i definiše se preslikavanje

$$f\colon B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \to B_{n+1} \times \ldots \times B_{n+m}$$

na sledeći način: Za svako $(b_1,\ldots,b_n) \in B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$

$$f(b_1,b_2,\ldots,b_n) = (b_{n+1},\ldots,b_{n+m}) \Leftrightarrow$$

PIb_{n+j}, za sve $j \in N_m$, gde je $P \in V$ jedinstvena tačka tako da je PIb_s za sve $s \in N_s$. Od definicije $[n,n+m]$-rešetke sledi da za svako $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ i svaku injekciju $\phi\colon N_n \to N_{n+m}$ postoji jedinstveno

$$(b_1,b_2,\ldots,b_{n+m}) \in B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_{n+m}$$

tako da je

$$b_{\phi(1)}=a_1, b_{\phi(2)}=a_2, \ldots, b_{\phi(n)}=a_n$$

i

$$f(b_1,\ldots,b_n) = (b_{n+1},\ldots,b_{n+m}).$$

Drugim rečima, za svako $(b_1,\ldots,b_n,b_{n+1},\ldots,b_{n+m}) \in B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_{n+m}$ tako da je $f(b_1,\ldots,b_n)=(b_{n+1},\ldots,b_{n+m})$, bilo koje n-koordinate jednoznačno odredjuju preostale m-koordinate. Koristeći ovu osobinu preslikavanja f dobijamo da je:

---

[1] $|B_1| = |B_2| = \ldots = |B_{n+m}| = q$

$$f(b_1^1,\ldots,b_{n-1}^1,b_n^1) = (b_{n+1}^1,\ldots,b_{n+m}^1)$$
$$f(b_1^1,\ldots,b_{n-1}^1,b_n^2) = (b_{n+1}^2,\ldots,b_{n+m}^2)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f(b_1^1,\ldots,b_{n-1}^1,b_n^q) = (b_{n+1}^q,\ldots,b_{n+m}^q)$$

gde su $b_i^1,\ldots,b_i^q$ svi blokovi klase B_i, $i=n, n+1,\ldots,n+m$. Nizovi blokova $(b_n^1,\ldots,b_{n-1}^1,b_n^j,b_{n+1}^j,\ldots,b_{n+m}^j)$ koji odredjuju jedinstvene tačke P_j, $j=1,2,\ldots,q$ imaju iste prve n-1 članove $b_1^1,\ldots,b_{n-1}^1$. Otuda kroz bilo koje dve tačke P_s, P_t, $s\neq t$, $s, t=1,2,\ldots,q$ prolazi tačno (n-1)-blokova $b_1^1,\ldots,b_{n-1}^1$. Vrednost funkcije

$$f(b_1^1,\ldots,b_{n-2}^1,b_{n-1}^2,b_n^1)$$

ne sadrži nijedan od blokova $b_{n+1}^1,\ldots,b_{n+m}^1$ jer se $(b_1^1,\ldots,b_{n-2}^1,b_{n-1}^2,b_n^1)$ i $(b_1^1,\ldots,b_{n-2}^1,b_{n-1}^1,b_n^1)$ razlikuju jedino po (n-1)-voj komponenti $b_{n-1}^1\neq b_{n-1}^2$. Takodje $f(b_1^1,\ldots,b_{n-2}^1,b_{n-1}^2,b_n^1)$ sadrži najviše jedan od blokova $b_{n+1}^j,\ldots,b_{n+m}^j$, $j=2,\ldots,q$ jer se $(b_1^1,\ldots,b_{n-2}^1,b_{n-1}^2,b_n^1)$ i $(b_1^1,\ldots,b_{n-1}^1,b_n^j)$, $j=2,\ldots,q$ razlikuju po poslednje dve komponente. Vrednost funkcije $f(b_1^1,\ldots,b_{n-1}^2,b_n^1)$ je m-torka blokova koji pripadaju raznim klasama paralelnik blokova. Od prethodne diskusije sledi da se blokovi ove m-torke mogu razbiti na q-1 najviše jednoelementnih podskupova od čega sledi da je $m \leq q-1$[1].

Ako je $m < q-1$ onda $f(b_1^1,\ldots,b_{n-1}^2,b_n^1)$ ne sadrži nijedan od blokova $b_{n+1}^j,\ldots,b_{n+m}^j$ (bar za jedno $j=2,\ldots,q$). Tada kroz tačke P (odredjene blokovima $b_1^1,\ldots,b_{n-1}^2,b_n^1$) i P_j prolaze tačno (n-2)-blokova $b_1^1,\ldots,b_{n-2}^1$ i posmatrana rešetka za $m < q-1$ i bilo koje $n \geq 2$ nije blok dizajn.

Ako je $m = q-1$ i $n > 2$ onda vrednost funkcije

$$f(b_1^1,\ldots,b_{n-3}^1,b_{n-2}^2,b_{n-1}^2,b_n^1)$$

je m-torka blokova koji pripadaju raznim klasama paralelnih blokova. Ako bi ova m-torka sadržala bar po jedan od blokova $b_{m+1}^j,\ldots,b_{n+m}^j$ za sve $j=1,\ldots,q$ onda bi se mogla razbiti na q

[1] U [1] i [2] na druga dva načina dokazano je da je $m \leq q-1$

najmanje jednoelementnih podskupova. Otuda sledi da je $m \geq q$ što protivureči predpostavci da je $m = q-1$. Dakle vrednost funkcije $f(b_1^1,\ldots,b_{n-3}^1,b_{n-2}^2,b_{n-1}^2,b_n^1)$ ne sadrži nijedan od blokova $b_{n+1}^j,\ldots,b_{n+m}^j$ bar za jedno $j=1,2,\ldots,q$. Ako ne sadrži nijedan od blokova $b_{n+1}^1,\ldots,b_{n+m}^1$, onda kroz tačke Q (odredjene blokovima $b_1^1,\ldots,b_{n-3}^1,b_{n-2}^2,b_{n-1}^2,b_n^1$) i P_1 prolazi tačno $(n-2)$-blokova $b_1^1,\ldots,b_{n-3}^1,b_n^1$. Ako ne sadrži nijedan od blokova $b_{n+1}^j,\ldots,b_{n+m}^j$, $j=2,\ldots,q$, onda kroz tačke Q i P_j prolazi tačno $(n-3)$-blokova $b_1^1,\ldots,b_{n-3}^1$. Dakle u oba slučaja posmatrana rešetka nije blok dizajn.

Ostaje slučaj kada je $n=2$, $m=q-1$. Koristeći osobine gore definisanog preslikavanja

$$f\colon B_1\times B_2 \to B_{2+1}\times\ldots\times B_{2+m}$$

dokazaćemo da kroz bilo koje dve tačke prolazi jedinstven blok[1]. Neka su P i Q dve proizvoljne tačke posmatrane rešetke odredjene blokovima (b_1^ℓ,b_2^h) i (b_1^s,b_2^t) respektivno. Tada

$$\begin{aligned} f(b_1^\ell,b_2^1) &= (b_{2+1}^1,\ldots,b_{2+m}^1)\\ &\vdots\\ f(b_1^\ell,b_2^h) &= (b_{2+1}^h,\ldots,b_{2+m}^h)\\ &\vdots\\ f(b_1^\ell,b_2^q) &= (b_{2+1}^q,\ldots,b_{2+m}^q)\end{aligned}$$

Ako je $t=h$ tada $s\neq\ell$, jer su P i Q dve različite tačke i vrednost funkcije $f(b_1^s,b_2^h)$ ne sadrži nijedan od blokova $(b_{2+1}^h,\ldots,b_{2+m}^h)$ jer se (b_1^ℓ,b_2^h) i (b_1^s,b_2^h) razlikuju samo po prvoj komponenti $b_1^\ell\neq b_1^s$. Takodje $f(b_1^s,b_2^h)$ sadrži tačno po jedan od blokova $b_{2+1}^j,\ldots,b_{2+m}^j$ za svako $j\in\{1,2,\ldots,q\}\setminus\{h\}$ jer se (b_1^ℓ,b_2^j) i (b_1^s,b_2^h) razlikuju po obe komponente i jer je $m = q-1$. Otuda

$$f(b_1^s,b_2^t) = f(b_1^s,b_2^h) = b_{2+1}^{\phi(1)},\ldots,b_{2+m}^{\phi(q-1)}$$

gde je ϕ neka bijekcija skupa $\{1,2,\ldots,q-1\}$ u skup $\{1,2,\ldots,q\}\setminus\{h\}$ i kroz tačke P i Q prolazi jedinstven bok b_2^h. Slično, ako je $s=\ell$ onda $t\neq h$ i

$$f(b_1^s,b_2^t) = f(b_1^\ell,b_2^t) = (b_{2+1}^{\psi(1)},\ldots,b_{2+m}^{\psi(q-1)}$$

---

[1] U [4] na drugi način dokazano je da su bilo koje dve tačke afine razvni kolinearne

gde je ψ neka bijekcija skupa $\{1,2,\ldots,q-1\}$ u skup $\{1,2,\ldots,q\}\setminus\{\ell\}$. U ovom slučaju kroz tačke P i Q prolazi jedinstven blok b_1^ℓ. Ako je $\ell\neq s$ i $h\neq t$, tada $f(b_1^s,b_2^t)$ ne sadrži nijedan od blokova $b_{n+1}^t,\ldots,b_{n+m}^t$, jer se (b_1^ℓ,b_2^t) i (b_1^s,b_2^t) razlikuju samo po prvoj koordinati $b_1^\ell \neq b_1^s$. Takodje $f(b_1^s,b_2^t)$ sadrži tačno po jedan od blokova $b_{2+1}^j,\ldots,b_{2+m}^j$ za svaku $j\in N_q\setminus\{t\}$ jer se (b_1^ℓ,b_2^j) i (b_1^s,b_2^t) razlikuju po obe koordinate i $m = q-1$. Tako dobijamo da je

$$f(b_1^s,b_2^t) = (b_{2+1}^{\alpha(1)},\ldots,b_{2+m}^{\alpha(q-1)})$$

gde je α bijekcija skupa N_{q-1} u skup $N_q\setminus\{t\}$. Pošto je $h \neq t$, postoji jedinstveno $i\in N_{q-1}$ tako da je $\alpha(i) = h$. Tada kroz tačke P i Q prolazi jedinstven blok $b_{2+1}^{\alpha(i)=h}$. Time je teorema dokazana.

U [2] je dokazano da se bilo koja dva neparalelna bloka jedne $[n,n+m]$-rešetke seku u $\mu=q^{n-2}$ blokova. Dakle svaka $[n,n+m]$-rešetka je afin dizajn. Dokazali smo da su blok dizajni akko je $n=2$, $m=q-1$, t.j. ako i samo ako su afine ravni. Koristeći ovaj rezultat i teoremu 2.1 dobija se tačnost sledeće teoreme koja daje ograničenje za broj paralelnih klasa $r = n+m$ konačne $[n,n+m]$-rešetke:

Teorema 3.2. Za svaku konačnu $[n,n+m]$-rešetku $S_r(1,q^{n-1},q^n)$ važi

$$r = n+m \leq q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1.$$

Jednakost važi ako i samo ako je $n=2$, $m=q-1$.

L I T E R A T U R A

[1] Čupona, G., Ušan, J., Stojaković, Z.: Multiquasigroups and some related structures, Prilozi MANU, Skopje, I/1 1980

[2] Stojmenovski, K.: On some combinatorical properties of finite n-dimensional nets, Proceedings of the Symposium n-Ary Structures, Skopje, 1982

[3] Beth, T., Jungnickel, D., Lenz, H.: Design Theory, Mannheum-Wien-Zürich, 1985

[4] Белоусов, В.Д.: Алгебраические сети и квазигруппы, Кишинев, 1971

BLOCK DESIGNS AND [n,n+m]-LATTICES

Alija Mandak

S u m m a r y

In this paper we examine the relationship between block designs and [n,n+m]-lattices, and we prove that [n,n+m]-lattices are block designs if and only if n=2, m=q-1. For finite [n,n+m]-lattices we give a bound, r=n+m, for parallel classes.