Математички Билтен
19 (XLV)
1995 (91–106)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ОПЕРАЦИИ СО БЛОК ДИЗАЈНИ

Жанета Попеска [1)], Калина Треневска [2)]

Апстракт

Со оваа работа се обопштува дефиницијата на блок дизајн која овозможува дефинирање комплетни множества во даден блок дизајн, а преку нивни сврзани дизајни како и одредени операции во множеството дизајни. Се дефинира дисјунктна, блок–дисјунктна и третман–дисјунктна унија на фамилии дизајни, обопштен производ на дизајни и се испитуваат нивни својства. Воведените операции се искористени за поедноставно докажување на некои својства на матриците на инцидентност и информрационите матрици на конечни дизајни.

1. Вовед

Во теоријата на планирање (дизајнирање) и статистичка анализа на експерименти важна улога има теоријата на блок дизајни, специјално конечни блок дизајни заедно со нивните информациони матрици, а посебно за оценување на ефекти на третмани во еден блок дизајн. Во овој труд нема да разгледуваме конкретни статистички примени на блок дизајните во планирање и анализа на експерименти туку ќе разработиме некои комбинаторно–структурни елементи од теоријата на дизајните.

Во обемната литература од теоријата на блок дизајни како комбинаторни структури или како елементи од теоријата на експериментални дизајни се сретнуваат повеќе формални дефиниции. Така, во [2], блок дизајн се дефинира како фамилија мултимножества на дадено непразно множество третмани, односно колекции од третмани како во [5], додека во [1] и [3] блок дизајн се дефинира како тројка (T, B, I) каке T и B се непразни дисјунктни множества, а $I \subseteq T \times B$ е структура на инцидентност.

Со цел да се опфатат различните дефиниции во оваа работа дадена е следната обопштена дефиниција на блок дизајн.

Дефинција **1.1**. *Блок дизајн* е подредена тројка $D = (T, \mathbf{B}; \eta)$ каде што T и $\mathbf{B}$ се непразни множества, а $\eta: T \times \mathbf{B} \to \mathbb{N}$ е пресликување од $T \times \mathbf{B}$ во множеството ненегативни цели броеви $\mathbb{N}$.

Елементите на T ги викаме *третмани* (*точки*), додека елементите на $\mathbf{B}$ *блокови* (*прави*). За η велиме дека е *функција на инциденшност*, а ако $\eta(t, B) > 0$ велиме дека t и B се инцидентни, односно t се појавува $\eta(t, B)$ пати во B. За секој $B \in \mathbf{B}$ множеството

$$|B|_{\mathcal{D}} = \{t \mid t \in T,\ \eta(t, B) > 0\} \tag{1.1}$$

го нарекуваме *содржина* на блокот B, а множеството

$$(t)_{\mathcal{D}} = \{B \mid B \in \mathbf{B},\ \eta(t, B > 0\} \tag{1.2}$$

го нарекуваме *прамен* (*носач, локус*) на третманот t.

За еден третман $t \in T$ (блок $B \in \mathbf{B}$) велиме дека е *небитен* (*празен*) ако $(t)_{\mathcal{D}} = \emptyset$ ($|B|_{\mathcal{D}} = \emptyset$); во спритивно за $t(B)$, велиме дека е *битен* (*непразен*).

Ако за секој $t \in T$ и секој $B \in \mathbf{B}$, $\eta(t, B) = 0$, $\mathcal{D}$ ќе го нарекуваме *нулти блок дизајн* и ќе го означуваме со $\mathcal{D} = \mathcal{O}$. Според тоа точно е следново тврдење:

1.1°. За еден блок дизајн $\mathcal{D}$ следниве услови се еквивалентни:

(i) $\mathcal{D}$ е нулти,

(ii) секој третман е небитен во $\mathcal{D}$,

(iii) секој блок е празен во $\mathcal{D}$. ◇

За еден дизајн $\mathcal{D}$ велиме дека е *регуларен* ако секој негов третман е битен и секој блок непаразен; додека во спротивно $\mathcal{D}$ го викаме нерегуларен.

Понатаму ќе го користиме поимот дизајн со значење на блок дизајн и доколку од текстот е јасно за кој дизајн станува збор, индексот $\mathcal{D}$ нема да го пишуваме.

Да забележиме дека иако дизајн е дефиниран како подредена тројка, во суштина множествата T и $\mathbf{B}$ се рамноправни, односно со замена на улогите на третманите и блоковите во еден блок дизајн се добива нему *дуален* блок дизајн. Во оваа работа нема да се задржуваме на улогата на дуалните дизајни.

Заедно со воведов, работата е поделена на 6 делови. Во вториот дел се разработени поимите за комплетни множества и компоненти на сврзаност на дизајни. Во третиот дел разгледани се унии на дизајни, а основни резултати се: *Теорема* **3.3°** за разложување на регуларен дизајн како дисјунктна унија на своите компоненти на сврзаност, и *Теорема* **3.5°** за разложување на нерегуларен дизајн како дисјунктна, третман–дисјунктна или блок–дисјунктна унија од регуларен и нулти дизајн. Користејќи бинарни операции на $\mathbb{N}$, во четвртиот дел, на секоја бинарна операција во множеството ненегативни цели броеви $\mathbb{N}$ ѝ се придружуваат по две операции меѓу дизајни. Едната се дефинира на дизајни над исти множества третмани и исти множества блокови, а другата на произволни дизајни. Во последните два дела се разгледани само конечни дизај ни. Во петтиот дел функцијата на инцидентност се интерпретира како матрица на инцидентност, при што со помош на матрици на инцидентност на дадени дизајни се изразуваат и се опишуваат матрици на инцидентност добиени од тие дизајни со операциите од третиот и четвртиот дел. Шестиот дел се однесува на информационите матрици на дизајни. Иако поимот информациона матрица е осмислен кај секој конечен дизајн, мотивот за негова разработка е опишување на просторот оценливи линеарни функции на ефектите на третманите, што произлегува од линеарниот модел индуциран од конечен дизајн. Тој простор на оценливи функции е изоморфен со просторот генериран од редиците на информационата матрица A на дадениот дизајн, од што произлегува важноста за определување на рангот на A. Познато е дека рангот на A за сврзан бинарен дизајн со v третмани е $v - 1$ ([2], [3]). Основни резултати во шестиот дел се *Теоремите* **6.9** и **6.10°** според кои рангот на A за дизајн со v третман и s компоненти на сврзаност е $v - s$.

2. Компоненти на сврзаност

Во овој дел ќе ги разработиме поимите за комплетни множества на третмани и компонети на сврзаност на дизајни.

Во понатамошниот текст, нека $\mathcal{D} = (T, \mathbf{B}; \eta)$ е даден дизајн.

Дефинција **2.1**. За едно множество третмани S, т.е. $S \subseteq T$, велиме дека е *комплетно* во дизајнот $\mathcal{D}$ ако за секој $B \in \mathbf{B}$ важи:

$$S \cap |B| \neq \emptyset \Rightarrow |B| \subseteq S\,. \tag{2.1}$$

Од дадената дефиниција, непосредно следуваат следните својства.

2.1°. (i) Множеството третмани T во дизајн $\mathcal{D}$ е комплетно.

(ii) Фамилијата комплетни множества во дизајн $\mathcal{D}$ е затворена во однос на операциите унија, пресек и разлика. ◊

2.2°. Ако $Q \subseteq T$ и ако низата $Q_0, Q_1, \ldots, Q_p, \ldots$ е дефинирана со

$$Q_0 = Q \qquad \text{и} \qquad Q_{p+1} = Q_p \bigcup \bigcup_{t \in Q_p} \bigcup_{B \in (t)} |B|\,, \tag{2.2}$$

тогаш унијата $< Q >= \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} Q_p$ е најмалото комплетно множество кое го содржи Q. ◊

За $< Q >$ велиме дека е *затворач* на Q. Наместо $< \{t\} >$ ќе пишуваме само $< t >$.

2.3°. (i) Ако $t \in |B| \Leftrightarrow |B| = \{t\}$ или t е небитен третман, тогаш $< t >= \{t\}$.

(ii) Ако $< t >= \{t\}$, тогаш t е небитен третман или за секој $B \in (t)_{\mathcal{D}}$ важи $|B|_{\mathcal{D}} = \{t\}$. $\diamondsuit$

2.4°. За секој $t \in T$, $< t >$ е минимално комплетно множество, односно за секои t, $t' \in T$ следните услови се еквивалентни:

(i) $t' \in < t >$; (ii) $t \in < t' >$; (iii) $< t > \cap < t' > \neq \emptyset$; (iv) $< t >=< t' >$.

Доказ: Доволно е да се докаже дека (i) $\Rightarrow$ (ii). Од (i) следува дека $< t' > \subseteq < t >$. Бидејќи $< t' >$ е комплетно множество, следува дека $T\setminus < t' >$ е комплетно множество, па тогаш и $< t > \cap(T\setminus < t' >) =< t > \setminus < t' >= S$ е комплетно множество. Ако $S \neq \emptyset$, тогаш следува дека S е комплетно вистинско подмножество од $< t >$, што е спротивно со дефиницијата на $< t >$. Значи $S = \emptyset$, т.е. $t \in < t' >$. $\diamondsuit$

Дефинција **2.2**. Велиме дека $\mathcal{D}$ е ***сврзан дизајн***, ако T е единствено комплетно непразно множество во $\mathcal{D}$.

Бидејќи подмножествата $< t >$ од T за $t \in T$ се минимални непразни копмлетни множества, нив ќе ги нарекуваме *компоненти на сврзаност* на $\mathcal{D}$.

Од дефиниција за сврзаност и компоненти на сврзаност следува дека:

2.5°. $\mathcal{D}$ е сврзан акко T е единствена компонента на сврзаност. $\diamondsuit$

Ако $\mathcal{D}$ е нулти дизајн, тогаш секој третман е небитен, па според тоа $\mathcal{D}$ е сврзан акко T е едноелементно множество.

Како резиме на изнесените својства го добивме и следново:

2.6°. Нека $\{T_i \mid i \in I\}$ е фамилијата од сите различни компоненти на сврзаност на $\mathcal{D}$, при што $T_i \neq T_j$ за $i \neq j$. Тогаш точни се следниве тврдења:

(i) $i \neq j \Rightarrow T_i \cap T_j = \emptyset$; (ii) $t \in T_i \Leftrightarrow < t >= T_i$; (iii) $T = \bigcup_{i \in I} T_i$;

(iv) Едно непразно подмножество S од T е комплетно акко постои подмножество J од I, такво што $S = \bigcup_{j \in J} T_j$. $\diamondsuit$

Како и кај секој вид структури и во случајот на дизајни може да се воведе поимот за изоморфизам.

Дефинција **2.3**. За два дизајни $\mathcal{D} = (T, \mathbf{B}, \eta)$ и $\mathcal{D}' = (T', \mathbf{B}', \eta')$ велиме дека се *изоморфни* и пишуваме $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}'$ акко постојат биекции

$f{:}\,T \to T'$ и $g{:}\,\mathbf{B} \to \mathbf{B}'$ такви што $(\forall t \in T,\ \forall B \in \mathbf{B})$ $\eta(t,\,B) = \eta'\big(f(t),\ g(B)\big)$.

Јасно е дека

2.7°. Ако $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ се изоморфни дизајни, тогаш

(i) За секој $B \in \mathbf{B}_1$ важи: $f(|B|_{\mathcal{D}_1}) = |g(B)|_{\mathcal{D}_2}$; и

(ii) S е компонента на сврзаност (комплетно множество) во $\mathcal{D}_1$ акко $f(S)$ е компонента на сврзаност (комплетно множество) во $\mathcal{D}_2$. ♢

Дефинција **2.4**. За два дизајни $\mathcal{D}' = (T, \mathbf{B}, \eta')$ и $D'' = (T, \mathbf{B}, \eta'')$ велиме дека се *еквивалентни* ако имаат исти фамилии компоненти на сврзаност. Два дизајни $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}''$ ги нарекуваме *силно еквивалентни* ако важи условот:

$$n'(t,\,B) = 0 \Leftrightarrow \eta''(t,\,B) = 0, \quad \text{односно} \quad \eta'(t,\,B) \neq 0 \Leftrightarrow n''(t,\,B) \neq 0.$$

За еден дизајн велиме дека е *бинарен* ако $\eta(t,\,B) \leq 1$, за секои $t \in T$, $B \in \mathbf{B}$.

Од дадената дефиниција добиваме:

2.8°. Ако $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}''$ се силно еквивалентни, тогаш тие се еквивалентни. ♢

2.9°. Еден дизајн $\mathcal{D}$ е екивалентен со нулти дизајн $\mathcal{O}$ акко секој третман во $\mathcal{D}$ е компонента на сврзаност. ♢

2.10°. Еден нулти дизајн е силно еквивалентен само со себе. ♢

2.11°. Секој дизајн е силно еквивалентен со бинарен дизајн. ♢

3. Унии на дизајни

Во овој дел ќе дадеме начин за конструкција и разложување на дизајни како унии на фамилии дизајни.

Дефинција **3.1**. За дизајните $\mathcal{D}_1 = (T_1, \mathbf{B}_1, \eta_1)$, $(T_2, \mathbf{B}_2,\ \eta_2)$ велиме дека се *компатибилни* ако:

$$t \in T_1 \cap T_2, \quad B \in \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2 \Rightarrow \eta_1(t,\,B) = \eta_2(t,\,B).$$

Поопшто, за една фамилија дизајни $\{\mathcal{D}_i \mid i \in I\}$, $\mathcal{D}_i = (T_i, \mathbf{B}_i; \eta_i)$, велиме дека е *компатибилна*, ако за кои било $i, j \in I$, $\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_j$ се компатибилни.

Јасно е следново тврдење:

3.1°. Нека $\{\mathcal{D}_i \mid i \in I\}$, $\mathcal{D}_i = (T_i, \mathbf{B}_i; \eta_i)$ е компатибилна фамилија дизајни и нека $T = \bigcup\limits_i T_i$; $\mathbf{B} = \bigcup\limits_i \mathbf{B}_i$; Ако дефинираме $\eta{:}\,T \times \mathbf{B} \to \mathbf{N}$ со:

$$\eta(t, B) = \begin{cases} \eta_i(t, B) & \text{ако постои } i \text{ таков што } t \in T_i,\ b \in \mathbf{B}_i \\ 0 & \text{во другите случаи} \end{cases}$$

тогаш $\mathcal{D} = (T, \mathbf{B}; \eta)$ е блок дизајн. ♢

За ваков дизајн $\mathcal{D}$ велиме дека е *унија*, т.е. е *разложен како унија на* дадената компатибилна фамилија дизајни $\{\mathcal{D}_i \mid i \in I\}$ и пишуваме:

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{D}_i ,$$

односно:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_p, \qquad \text{ако} \qquad I = \{1, 2, \ldots, p\}. \tag{3.1}$$

Дефинција **3.2**. За два дизајни $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ велиме дека се: *дисјунктни* ако $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ и $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2 = \emptyset$; *блок–дисјунктни* ако $T_1 = T_2$, $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2 = \emptyset$; и *третман–дисјунктни* $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$. За една фамилија дизајни $\{\mathcal{D}_i \mid i \in I\}$ ќе велиме дека е *дисјунктна, блок–дисјунктна* или *третман–дисјунктна*, ако соодветното својство го има кој било пар дизајни од фамилијата и пишуваме соодветно:

$$\mathcal{D} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{D}_i, \qquad \mathcal{D} = \bigotimes^b_{i \in I} \mathcal{D}_i, \qquad \text{и} \qquad \mathcal{D} = \bigotimes^t_{i \in I} \mathcal{D}_i . \tag{3.2}$$

3.2°. Ако $\mathcal{D} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{D}_i$ е дисјунктна унија на фамилија дизајни $\{\mathcal{D}_i \mid i \in I\}$, точни се следните својства:

(i) $|B|_{\mathcal{D}} = |B|_{\mathcal{D}_i}$, $(t)_{\mathcal{D}} = (t)_{\mathcal{D}_i}$ за секој $i \in T$, $t \in T_i$, $B \in \mathbf{B}_i$;

(ii) S е комплетно во $\mathcal{D}$ акко $S \cap T_i$ е комплетно за секој $i \in I$;

(iii) S е компонента на сврзаност во $\mathcal{D}$ акко постои $i \in I$, така што S е компонента на сврзаност во $\mathcal{D}_i$. ♢

Теорема **3.3°**. За секој регуларен дизајн $\mathcal{D} = (T, \mathbf{B}, \eta)$ постои еднозначно определена дисјунктна фамилија од сврзани дизајни $\{\mathcal{D}_i \mid i \in I\}$ за која $\mathcal{D}$ е нивна дисјунктна унија.

Доказ: Нека $\{T_i \mid i \in I\}$ е фамилија различни компоненти на сврзаност на $\mathcal{D}$. За даден $i \in I$, нека $\mathbf{B}_i = \{B \mid B \in \mathbf{B}, |B| \subseteq T_i\}$.

Тогаш, $\mathbf{B} = \bigcup_{i \in I} \mathbf{B}_i$, $\mathbf{B}_i \cap \mathbf{B}_j = \emptyset$, за $i \neq j$.

Ако $i \in I$, ставајќи $\eta_i(t, B) = \eta(t, B)$ за секои $t \in T_i$, $B \in \mathbf{B}_i$, добиваме дизајн $\mathcal{D}_i = (T_i, \mathbf{B}_i; \eta_i)$. Притоа, $\{\mathcal{D}_i \mid i \in I\}$ е дисјунктна фамилија дизајни. $\mathcal{D}$ е нивна дисјунктна унија и според **3.2°**, за секој $i \in I$, $\mathcal{D}_i$ е сврзан дизајн. ♢

Ако е точно равенството (3.2), при што секој дизајн $\mathcal{D}_i$ е сврзан велиме дека $\{\mathcal{D}_i \mid i \in I\}$ е фамилија *компонентни дизајни* на $\mathcal{D}$.

Воведените операции меѓу блок дизајни овозможуваат одредено разложување на еден дизајн на соодветни „подобри” дизајни.

Јасно е дека не претставува интерес разложување на нулти дизајн, па затоа да претпоставиме дека $\mathcal{D} = (T, \mathbf{B}, \eta)$ е нерегуларен и ненулти дизајн и дека T^{reg} и $\mathbf{B}^{\mathrm{reg}}$ се множествата битни третмани и блокови соодветно. Овие множества се непразни бидејќи $\mathcal{D}$ е ненулти. Ако дефинираме $\eta^{\mathrm{reg}}: T^{\mathrm{reg}} \times \mathbf{B}^{\mathrm{reg}} \to \mathbb{N}$ со $\eta^{\mathrm{reg}}(t, B) = \eta(t, B)$ добиваме дизајн $\mathcal{D}^{\mathrm{reg}} = (T^{\mathrm{reg}}, \mathbf{B}^{\mathrm{reg}}, \eta^{\mathrm{reg}})$ со следното својство:

3.4°. $\mathcal{D}^{\mathrm{reg}}$ е регуларен дизајн и притоа $S \subseteq T^{\mathrm{reg}}$ е компонента на сврзаност во $\mathcal{D}^{\mathrm{reg}}$ акко е компонента на сврзаност во $\mathcal{D}$. $\diamondsuit$

Теорема **3.5**. Нека $\mathcal{D} = (T, \mathbf{B}, \eta)$ е нерегуларен ненулти дизајн. Тогаш постои еднозначно определен нулти дизајн $\mathcal{D}_0 = (T_0, \mathbf{B}_0, \eta_0)$ таков што $\mathcal{D}$ е унија од $\mathcal{D}^{\mathrm{reg}}$ и $\mathcal{D}_0$. Притоа T_0 и $\mathbf{B}_0$ се определени како што следува:

(i) $T = T^{\mathrm{reg}} \Rightarrow T_0 = T, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B} \backslash \mathbf{B}^{\mathrm{reg}}$;

(ii) $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{reg}} \Rightarrow \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}, \quad T_0 = T \backslash T^{\mathrm{reg}}$;

(iii) $T_0 = T \backslash T^{\mathrm{reg}}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B} \backslash \mathbf{B}^{\mathrm{reg}}$, ако $T_0 \neq \emptyset$, $\mathbf{B}_0 \neq \emptyset$.

(Според тоа, во случајот (iii) унијата е дисјунктна, додека во (i) и (ii) имаме примери на блок–дисјунктни и третман–дисјунктни дизајни соодветно). $\diamondsuit$

За $\mathcal{D}^{\mathrm{reg}}$ велиме дека е регуларна, а $\mathcal{D}_0$ нулта компонента на $\mathcal{D}$.

4. Производи на дизајни

Во понатамошното изложување ќе претпоставиме дека $*$ е бинарна, операција во множеството ненегативни цели броеви $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Прво, ќе претпоставиме дека $\mathcal{D}_1 = (T, \mathbf{B}, \eta_1)$ и $\mathcal{D}_2 = (T, \mathbf{B}, \eta_2)$ се дизајни со исти множества третмани и блокови. Ако ставиме

$$(\eta_1 * \eta_2)(t, B) = \eta_1(t, B) * \eta_2(t, B) \tag{4.1}$$

добиваме нов дизајн $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2 = (T, B, \eta_1 * \eta_2)$.

Да забележиме дека и за регуларни дизајни $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, можно е $\mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2$ да биде нерегуларен дизајн.

Од многуте операции во $\mathbb{N}$ посебно ќе ги разгледаме операциите собирање $+$, множење $\cdot$, максимум max и минимум *min*.

Да наведеме неколку својства.

4.1°. Дизајнот $\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2$ е силно еквивалентен со $D_1 \min \mathcal{D}_2$, додека $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ е силно еквивалентен со $\mathcal{D}_1 \max \mathcal{D}_2$. $\diamondsuit$

4.2°. Непразно множество третмани S е компонента на сврзаност на дизајнот $\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2$ акко постојат компоненти на сврзаност S_1 и S_2 во $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ соодветно, такви што $S = S_1 \cap S_2$. $\diamondsuit$

Нека $\mathcal{D}_1 = (T_1, \mathbf{B}_1, \eta_1)$ и $\mathcal{D}_2 = (T_2, \mathbf{B}_2, \eta_2)$ се произволни дизајни и $*$ е операција во $\mathbf{N}$. Дефинираме нов дизајн $\mathcal{D} = (T, \mathbf{B}, \eta)$ со:

$$T = T_1 \times T_2; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \quad \text{и} \quad \eta = \eta_1[*]\eta_2$$

дефинирано со:

$$\eta\big((t_1, t_2), (B_1, B_2)\big) = \eta_1(t_1, B_1) * \eta_2(t_2, B_2). \tag{4.2}$$

Добиениот дизајн го означуваме со $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1[*]\mathcal{D}_2$ и велиме дека $\mathcal{D}$ е $*$ – *директен* производ на $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$.

Да формулираме неколку својства за вака дефинирани операции меѓу дизајните.

4.3°. За кои било дизајни $\mathcal{D}_1 = (T_1, \mathbf{B}_1, \eta_1)$ и $\mathcal{D}_2 = (T_2, \mathbf{B}_2, \eta_2)$ и за кои било $B_1 \in \mathbf{B}_1$ и $B_2 \in \mathbf{B}_2$ точни се равенствата

$$|(B_1, B_2)|_{\mathcal{D}_1[\cdot]\mathcal{D}_2} = |B_1|_{\mathcal{D}_1} \times |B_2|_{\mathcal{D}_2} \tag{4.3}$$

и

$$|(B_1, B_2)|_{\mathcal{D}_1[+]\mathcal{D}_2} = (|B_1|_{\mathcal{D}_1} \times T_2) \cup (T_1 \times |B_2|). \quad \diamondsuit \tag{4.4}$$

4.4°. Дизајните $\mathcal{D}_1[+]\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_1[\max]\mathcal{D}_2$ и дизајните $\mathcal{D}_1[\cdot]\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_1[\min]\mathcal{D}_2$ се силно еквивалентни. $\diamondsuit$

4.5°. Непразно подмножество S од $T_1 \times T_2$ е компонента на сврзаност во $\mathcal{D}_1[\cdot]\mathcal{D}_2$ акко постојат компоненти на сврзаност во $\mathcal{D}_1[\cdot]\mathcal{D}_2$ акко постојат компоненти на сврзаност S_1 и S_2 во $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ соодветно, такви што $S = S_1 \times S_2$. $\diamondsuit$

4.6°. За кои било дизајни $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ дизајнот $\mathcal{D}_1[+]\mathcal{D}_2$ е сврзан. $\diamondsuit$

5. Матрици на инцидентност на конечни дизајни

За еден дизајн $\mathcal{D}(T, B; \eta)$ велиме дека е конечен ако T и B се конечни множества. Понатаму ќе работиме со конечни дизајни. Нека $|T| = v$ и $|B| = b$. Тогаш T и B можеме да ги претставиме како:

$$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_v\} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_b\} \tag{5.1}$$

каде што $t_{i'} \neq t_{i''}$ за $i' \neq i''$ и $B_{j'} \neq B_{j''}$ за $j' \neq j''$. Во ваков случај пресликувањето η може да се опише со таканаречена *матрица на инцидентност* дефинирана со:

Дефинција **5.1**. Ако $\mathcal{D}$ е конечен дизајн за матрицата

$$\mathbf{N} = \big[\eta(t_i, B_j)\big] = \big[n_{ij}\big]_{v \times b} \tag{5.2}$$

велиме дека е *матрица на инцидентност* на дизајнот $\mathcal{D}$.

Забелешка: Затоа што постојат $v! \cdot b!$ можни подредувања на T и B на еден дизајн можат да му се придружат најмногу $v! \cdot b!$

различни матрици на инциденттност. Сепак, множеството матрици на инциденттност на еден конечен дизајн е наполно определено со една од тие матрици што се гледа од следното својство.

5.1°. Ако $\mathbf{N}$ е матрица на инциденттност на дизајн $\mathcal{D}$, тогаш $\mathbf{N}^*$ е матрица на инциденттност на $\mathcal{D}$ акко $\mathbf{N}^*$ е добиена од $\mathbf{N}$ со пермутација на редици и/или колони. ◊

Непосредно од дефиницијата на матрица на инциденттност следува:

5.2°. Два дизајни се изоморфни акко имаат исто множество матрици на инциденттност. ◊

На операциите на дизајни опишани во параграфите **3**. и **4**. им одговараат соодветни операции на нивните матрици на инциденттност.

Операцијата *директен збир на матрици* се дефинира на следниот начин.

Ако $C = [c_{ij}]_{m' \times n'}$, $D = [d_{ij}]_{m'' \times n''}$ се две матрици и ако $m = m' + m''$, $n = n' + n''$, тогаш нивниот директен збир $C \oplus D = K = [k_{ij}]_{m \times n}$ е определен со:

$$C \oplus D = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Слично, операцијата *допишување од десно* (*од долу*) на матрици се дефинира на следниот начин:

Ако $C = [c_{ij}]_{m' \times m'}$, $D = [d_{ij}]_{m'' \times n''}$ се две матрици и ако $m' = m''$ ($n' = n''$), тогаш матрицата D допишана од десно – CrD (од долу – CdD) на C е:

$$CrD = [\,C \quad D\,] \qquad \text{и} \qquad CdD = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Од дефиницијата следува дека:

5.3°. Директен збир и допишување на матрици се асоцијативни операции. ◊

Имајќи ги предвид дефинициите за дисјунктна, третман–дисјунктна и блок–дисјунктна унија на дизајни дадена во параграф **3**, ги добиваме следниве тврдења:

5.4°. Ако $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_s\}$ е дисјунктна фамилија од дизајни со соодветни матрици на инциденттност $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{N}_s$, тогаш $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \oplus \mathbf{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{N}_s$ е матрица на инциденттност на дисјунктната унија $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{D}_s$. ◊

5.5°. Нека $\mathcal{D} = (T, \mathbf{B}, \eta)$, $\mathcal{D}' = (T, \mathbf{B}', \eta')$, $\mathcal{D}'' = (T'', \mathbf{B}, \eta'')$ се такви $\mathbf{B} \cap \mathbf{B}' = T \cap T'' = \emptyset$. Ако $\mathbf{N}, \mathbf{N}'$ и $\mathbf{N}''$ се матрици на инцидентност на $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, и $\mathcal{D}''$, соодветно, тогаш NrN' и NdN'' се матрици на инцидентност на $\mathcal{D} \otimes^b \mathcal{D}'$ и $\mathcal{D} \otimes^t \mathcal{D}''$. ◊

Да ги разгледаме својствата на матриците на инцидентност кај операциите на дизајни дефинирани во параграф **4**.

5.6°. Нека два конечни дизајни $\mathcal{D}_1 = (T, \mathbf{B}, \eta_1)$ и $\mathcal{D}_2 = (T, \mathbf{B}, \eta_2)$ имаат матрици на инцидентност $\mathbf{N}_1 = [n'_{ij}]$ и $\mathbf{N}_2 = [n''_{ij}]$ соодветно, при исто подредување на третманите и блоковите. Нека

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2 = (T, \mathbf{B}, \eta_1 * \eta_2)$ каде $*$ е операција во $\mathbf{N}$. Тогаш матрицата $\mathbf{N} = [n_{ij}]$, каде што $n_{ij} = n'_{ij} * n''_{ij}$, е матрица на инцидентност на дизајнот $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2$. ◊

Да забележиме дека ако операцијата $*$ е собирање на броеви, соодветната операција кај матриците е обичното собирање на матрици, ако $*$ е множење на броеви тогаш соодветната операција на матриците не е обичното множење на матрици.

За определување на матрица на инцидентност на дизајн $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1[*]\mathcal{D}_2$ ќе дефинираме операција $[*]$ меѓу матрици на следниот начин.

Ако $D = [d_{ij}]$ е матрица а c е број дефинираме $c * D = [c * d_{ij}]$.

Ако $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ и $D = [d_{ij}]_{s\times k}$ се две дадени матрици, тогаш матрицата $C[*]D$ од облик $(ms) \times (nk)$ се определува како Кронекеров $*$ –производ на матрица, односно со

$$C[*]D = \begin{bmatrix} c_{11} * D & c_{12} * D & \dots & c_{1n} * D \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} * D & \dots & \dots & c_{mn} * D \end{bmatrix}.$$

Ќе ја покажеме следната теорема:

Теорема **5.7°**. Ако $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ се матрици на инцидентност на дизајните $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ соодветно и $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1[*]\mathcal{D}_2$ е дефиниран како во (4.2), тогаш $\mathbf{N}_1[*]\mathbf{N}_2$ е матрица на инцидентност на дизајнот $\mathcal{D}$.

Доказ: Нека $\mathcal{D}_1 = (T_1, \mathbf{B}_1, \eta_1)$ и $\mathcal{D}_2 = (T_2, \mathbf{B}_2, \eta_2)$ и за поедноставно пишување, нека $T_1 = \{1, 2, \dots, v_1\}$, $T_2 = \{1, 2, \dots, v_2\}$, $\mathbf{B}_1 = \{1, 2, \dots, b_1\}$ и $\mathbf{B}_2 = \{1, 2, \dots, b_2\}$, при што матриците на инцидентност се определени при овие распореди на третманите и блоковите. Тогаш ако $T = T_1 \times T_2$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ ги распоредиме лексикографски т.е. ако ставиме:

$$\begin{aligned}T =&\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, v_2), (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, v_2), \ldots\\ &\ldots, (v_1, 1), (v_2, 2), \ldots, (v_1, v_2)\}\\ \mathbf{B} =&\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, b_2), (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, b_2), \ldots\\ &\ldots, (b_1, 1), (b_2, 2), \ldots, (b_1, b_2)\}\end{aligned}$$

добиваме дека $\mathbf{N}_1[*]\mathbf{N}_2$ е матрица на инцидентност на $\mathcal{D}_1[*]\mathcal{D}_2$. $\Diamond$

6. Информациони матрици на конечни дизајни

Нека $\mathcal{D} = (T, B; \eta)$ е конечен дизајн, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_v\}$ множеството третмани и $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_b\}$ множеството блокови. Нека $N = [\eta(t_i, B_j)] = [n_{ij}]_{v\times b}$ е матрица на инцидентност на $\mathcal{D}$ при избраните подредувања на T и $\mathbf{B}$. За секој $i \in \{1, 2, \ldots, v\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, b\}$ дефинираме броеви r_1 и k_j со:

$$r_i = \sum_j n_{ij}; \qquad k_j = \sum_i n_{ij}, \tag{6.1}$$

Всушност r_i е бројот на појавувања на третманот t_i во дизајнот, додека k_j е бројот на појавување на третмани во блокот B_j. Во тој контекст бројот:

$$n = \sum_i r = \sum_j k_j = \sum_{i,j} n_{ij} \tag{6.2}$$

се нарекува големина на дизајнот.

Според дефиницијата на дизајн, следува дека $r \geq 0$ за $1 \leq i \leq v$ и $k_j \geq 0$ за $1 \leq j \leq b$, при што $r_i = 0$ акко t_i е небитен третман и $k_j = 0$ акко B_j е празен блок.

Дефинираме две дијагонални матрици: $r^\delta = \Delta(r_i)$ и $k^\delta = \Delta(k_j)$, кои по дијагоналата ги имаат: r_i (на $i\times i$ место) и k_j (на $j\times j$ место) соодветно. Според тоа r^δ е $v\times v$, а k^δ е $b\times b$ матрица. За регуларни дизајни, r^δ и k^δ се несингуларни. Ако $\mathcal{D}$ има небитни третмани, тогаш r^δ е сингуларна, а ако $\mathcal{D}$ има празни блокови, тогаш k^δ е сингуларна. Иако k^δ во општ случај не е несингуларна, со $k^{-\delta}$ ќе ка означиме матрицата која по дијагоналата има k_j^{-1}, при што се договараме $k_j^{-1} = 0$ ако $k_j = 0$. Ако $\mathcal{D}$ е регуларен, $k^{-\delta}$ е инверзната матрица на k^δ.

Дефинција **6.1**. За матрицата A дефинирана со

$$A_{v\times v} = r^\delta - \mathbf{N}\cdot k^{-\delta}\cdot \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \tag{6.3}$$

велиме дека е *информациона матрица* на дизајнот $\mathcal{D}$.

Непосредно од (6.3) следува дека

$$a_{ij} = r_{ij} - \sum_{s=1}^{b} n_{is} k_s^{-1} n_{js} \text{ каде } r_{ij} = r_i \text{ ако } i = j \text{ и } r_{ij} = 0 \text{ ако } i = j,$$

односно

$$a_{ii} = r_i - \sum_{u=1}^{b} n_{iu}^2 k_u^{-1} \text{ и } a_{ij} = - \sum_{u=1}^{b} n_{iu} n_{ju} k_u^{-1} \text{ за } i \neq j. \tag{6.4}$$

6.п) Од (6.1) и (6.4) следува дека се точни следните тврдења.

6.1°. Ако A и A^* се различни информациони матрици на ист дизајн $\mathcal{D}$, тогаш A^* може да се добие од A со последователна пермутација на редици и колони. ◊

6.2°. Ако $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{D}_s$ и A_i е информациона матрица на $\mathcal{D}_i$ за $i = 1, \ldots, s$, тогаш $A = A_1 \otimes \mathbf{A}_2 \otimes, \cdots, \otimes A_s$ е информациона матрица на $\mathcal{D}$. ◊

6.3°. Збирот на членовите на секој ред на A е 0, т.е. $\sum\limits_{j} a_{ij} = 0$. ◊

6.4°. Ако $i \neq j$ тогаш, $a_{ij} = 0$ акко третманот t_i и t_j не се во ист блок. ◊

6.5°. Нека A е информациона матрица за дизајн $\mathcal{D}(T, B; n)$ и нека $1 \leq i \leq v$. Следнива услови се еквивалентни:

(i) $\{t_i\}$ е компонента на сврзаност;

(ii) $a_{ii} = 0$; и

(iii) $a_{ij} = 0$ за секој j.

Доказ: Според **2.7°**, **6.1°** и **6.4°**, од (i) следуваат (ii) и (ii). Понатаму ако претпоставиме дека t_i е битен третман но не и компонента на сврзаност добивме дека $a_{ii} \neq 0$, односно од (iii) следува (i). ◊

Како последица на **6.5°** се добива дека:

6.6°. $A = 0$ акко секој третман е компонента на сврзаност. ◊

А според тоа важи и:

6.7°. Постојат неизоморфни дизајни со иста информациона матрица. ◊

6.8°. Ако $\mathcal{D}$ е конечен нерегуларен ненулти дизајн и $\mathcal{D}$ е: (i) дисјунктна или третман–дисјунктна; или (ii) блок–дисјунктна унија од регуларен дизајн $\mathcal{D}'$ и нулти дизајн $\mathcal{D}''$, чии информациони матрици се соодветно A и 0, тогаш: (i) $A \oplus 0$; (ii) A; е информациона матрица на $\mathcal{D}$. $\diamondsuit$

Досегашното изложување овозможува да го докажеме еден од најважните резултати на оваа работа.

Теорема **6.9°**. Ако А е информациона матрица на дизајн $\mathcal{D} = (T, \mathbf{B}; \eta)$ кој има v третмани и s компоненти на сврзаност, тогаш:

$$\operatorname{rang} A = v - s \, .$$

Доказ: Ако $\mathcal{D}$ е нулти дизајн, тогаш тврдењето следува од **2.9°** и **6.6°**. Според **6.8°**, ако $\mathcal{D}$ е нерегуларен и ненулти тогаш рангот на информационата матрица на $\mathcal{D}$ е ист како и рангот на информационата матрица на неговиот регуларен дел. Имајќи ги предвид Теоремите **3.3°** и **3.5°** и својствата **6.2°** и **6.8°**, доаѓаме до заклучок дека е доволно да го покажеме тврдењето за регуларни сврзани дизајни.

Од **6.3°** следува дека $\operatorname{rang} A \leq v - 1$. Спроведувајќи слична дискусија како и за бинарни дизајни ([2] или [3]), се добива дека од $\operatorname{rang} A < v - 1$ би следувало дека дизајнот има барем две компоненти на сврзаност. $\diamondsuit$

Следното својство е последица од **4.5°**, **6.9°** и претходната дискусија.

Теорема **6.10°**. Ако $\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2$ се конечни дизајни такви што $\mathcal{D}_i$ има v_i третмани и s_i компоненти на сврзаност и A е информациона матрица на $\mathcal{D}_1 [\cdot] \mathcal{D}_2$, $\operatorname{rang} A = v_1 v_2 - s_1 s_2$. $\diamondsuit$

Литература

[1] Beth, T., Jungnickel, D., Lenz, H.: *Design theorry*, Manheim-Wien-Zürich, 1985

[2] John, J. A.: *Cyclic designs*, Chapman and Hall, 1987

[3] Raghavarao, D.: *Constructions and combinatorial problems in design of experiments*, Dover publications, inc, New York, 1971

[4] Vajda, S.: *Matematics of experimental design*, 1967

[5] Raktoe, B. L.: *Factorial Designs*, John Wiley and Sons, Inc, 1981

OPERATIONS WITH BLOCK DESIGNS

Žaneta Popeska [1], Kalina Trenevska [2]

S u m m a r y

In the theory of experimental design and statistical analysis of experiments key role plays the theory of block designs, especially finite block designs and their information matrices in estimating the treatment effects. In this paper we will consider some combinatorial and structural elements in block–design theory.

There are known several (formally distinet) definitions of block–designs (for examle, [1]–[3], [5]). Here we define block–design as an ordered triple $\mathcal{D} = (T, \mathbf{B}, \eta)$ where T (the set of treatments), $\mathbf{B}$ (the set of blocks) are non empty and $\eta: (t, B) \to \eta(t, B)$ is a mapping from $T \times \mathbf{B}$ into $\mathbb{N}$ (the set of non–negative integers). (Further on we will write „design" instead of „block–design".) Connected classes (of treatments) are defined in a usual way, and $\mathcal{D}$ is called connected if T is the unique connected class. A collection of designs $(\mathcal{D}_i \mid i \in I)$ is compatible if their union $\cup\{\mathcal{D}_i \mid i \in I\}$ is a well defined design. Special compatible collections are disjoint collections, defined by: $T_i \cap T_j = \emptyset = \mathbf{B}_i \cap \mathbf{B}_j$, for any pair of distinct $i, j \in I$. The union of such a collections is called a disjjoint sum and denoted by $\underset{i}{\otimes} \mathcal{D}_i$.

A treatment $t \in T$ is called essential if $\eta(t, B) > 0$ for some $B \in \mathbf{B}$, and is called unessential if $\eta(t, B) = 0$ for any $B \in \mathbf{B}$. Similarly, a block $B \in \mathbf{B}$ is called essential if $\eta(t, B) > 0$ for some $t \in T$, and is called unessential if $\eta(t, B) = 0$ for any $t \in T$. A design is called regulatr, or zero iff all the treatments and blocks are essential, or unessential respectively.

Theorem 1. If $\mathcal{D}$ is a nonregular and a nonzero design then $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, where $\mathcal{D}_1 = (T^{\mathrm{reg}}, \mathbf{B}^{\mathrm{reg}}, \eta^{\mathrm{reg}})$ is a regular and $\mathcal{D}_2$ a zero design. $\mathcal{D}_1$ (the regular part of $\mathcal{D}$) and the maximal zero design $\mathcal{D}_2$ satisfying the above equation are unique. The union is disjoint iff T^{reg} and $\mathbf{B}^{\mathrm{reg}}$, are proper subset of T, $\mathbf{B}$ respectively. $\diamondsuit$

Theorem 2. If $\mathcal{D}$ if is a regular then is a disjoint union of a unique disjoint collection of connected designs. $\diamondsuit$

A design $\mathcal{D} = (T, \mathbf{B}, \eta)$ is finite if T and $\mathbf{B}$ are finite. Then an incidence matrix of $\mathcal{D}$ is defined by $\mathbf{N} = [\eta(t_i, B_j)] = [\eta_{ij}]_{v\times b}$ where $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_v\}$ and $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_b\}$. As we don't consider ordered designs, N is not unique. Namely we have the following proposition.

Proposition 3. (i) If N is an incidence of a (finite) design $\mathcal{D}$, then, N^* is also an incidence matrix of $\mathcal{D}$ iff N^* is obtained from N by permutations of rows and/or columns.

(ii) If $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{D}_k$ and for each i, N_i is an incidence matrix of $\mathcal{D}_i$ than $\mathrm{N}_1 \oplus \mathrm{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{N}_k$ is an incidence matrix of $\mathcal{D}$. $\diamondsuit$

Information matrices of finite designs are defined in the usual way. Namely, if $\mathrm{N} = [n_{ij}]_{v\times b}$ is an incidence matrix of $\mathcal{D}$ an information matrix A of $\mathcal{D}$ is defined by:

$$A_{v\times v} = r^{\delta} - \mathbf{N}\cdot k^{-\delta}\cdot \mathbf{N}^{\mathrm{T}}$$

where $r^{\delta} = \Delta(r_i)$ and $k^{\delta} = \Delta(k_j)$ are diagonal matrices with $r_i = \sum_j n_{ij}$ and $k_j = \sum_i n_{ij}$ and $k^{-\delta}$ is diagonal matrix with diagonal elements k_j^{-1}, and $k_j^{-1} = 0$ if $k_j = 0$.

Proposition 4. (i) If A and $A*$ are distinct information matrices of a finite design $\mathcal{D}$ then $A*$ is obtained from A by permutation of rows and columns.

(ii) $A = 0$ iff every treatment is a component. (Thus, 0 is the unique information matrix of a finite zero–design.)

(iii) If $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{D}_k$ and A_i is an information matrix of $\mathcal{D}_i$, then $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$ is an information matrix of $\mathcal{D}$.

(iv) Nonisomophic finite designe can have a same information matrix. $\diamondsuit$

The rank of information matrices of a finite designs is equal to the dimension of the space of estimable linear functions of treatment effects in a linear model induced by a block design $\mathcal{D}$ (for example [2], [3] and this implies the importance of the following.

Theorem 5. If $\mathcal{D}$ is a finite design with v treatments and s components, then $v - s$ is the rank of an information matrix of $\mathcal{D}$. $\diamondsuit$

Besides unions of compatible collections of designs, we associate two operations in the class of designs to any binary operation $*$ on $\mathbf{N}$. Namely if $\mathcal{D}_1 = (T, \mathbf{B}, \eta_1)$, $\mathcal{D}_2 = (T, \mathbf{B}, \eta_2)$, $\mathcal{D}_3 = (T_3,\ \mathbf{B}_3,\ \eta_3)$ and $\mathcal{D}_4 = (T_4,\ \mathbf{B}_4,\ \eta_4)$ are designs and $*$ an operation on $\mathbf{N}$ then two designs $\mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3[*]\mathcal{D}_4$ are defined as follows:

$$\mathcal{D}_1 * \mathcal{D}_2 = (T,\ \mathbf{B},\ \eta_1 * \eta_2), \quad \text{and} \quad \mathcal{D}_3[*]\mathcal{D}_4 = (T_3 \times T_4,\ \mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_4,\ \eta_3[*]\eta_4),$$

where

$$\eta_1 * \eta_2(t,\ B) = \eta_1(t,\ B) * \eta_2(t,\ B), \qquad \text{and}$$

$$\eta_3[*]\eta_4\big((t_3,\ t_4),\ (B_3,\ B_4)\big) = \eta_3(t_3,\ B_3) * \eta(t_4,\ B_4).$$

Some results concerning this topic are shown in the macedonian version of the paper, one of which is the following.

Theorem 6. Let $\cdot$ be the usual multiplication in $\mathbf{N}$ and $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1[\cdot]\mathcal{D}_2$.

(i) S is a component in $\mathcal{D}$ iff $S = S_1 \times S_2$, where S_i is a component in $\mathcal{D}_i$.

(ii) The rank of an information matrix of $\mathcal{D}$ is $v_1 v_2 - s_1 s_2$, where v_i, s_i are the numbers of treatments and components of $\mathcal{D}_i$. $\diamondsuit$

[1]Prirodno-matematichi fakultet

p. fah 162

91000 Skopje,

Makedonija

[2)]Ekonomski fakultet

91000 Skopje,

Makedonija