Математички Билтен
24 (L)
2000 (89–104)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ЗА ЛИНЕАРНАТА ИНТЕГРАЛНА РАВЕНКА НА ВОЛТЕРРА ЧИЕ РЕШЕНИЕ Е КУБ ОД РЕШЕНИЕТО НА ПОЕДНОСТАВНА ЛИНЕАРНА ИНТЕГРАЛНА РАВЕНКА НА ВОЛТЕРРА

Димов А. Лазо

Abstract

Во теоријата на диференцијалните равенки една од методите за нивно решавање е нивно сведување на диференцијални равенки од понизок ред. Па во таа смисла од многу автори е работено на проблематиката формирање на диференцијална равенка чие решение е степен од решението на диференцијална равенка од понизок ред. Овде ќе формираме линеарни интегрални равенки на Волтерра од втор вид чии решенија се кубови од решенијата на однапред зададени поедноставни линеарни интегрални равенки на Волтерра од втор вид. Притоа ќе користиме подобрен метод во однос на методот користен во [5].

Слично како кај диференцијалните равенки да тргнеме од линеарната интегрална равенка на Волтерра од втор вид:

$$y(x) + A(x)\int_0^x y(t)\,dt = B(x)\,, \tag{1}$$

која може лесно да се реши.

Во зависност од природата на величините A и B, коишто се појавуваат во интегралната равенка (1) ќе ги разгледаме следните случаи.

I. Да претпоставиме дека $A \neq 0$ е константа, а $B = B(x)$ е произволна трипати диференцијабилна функција од независно променливата x и ако ја воведеме смената

$$z = y^3 , \tag{2}$$

тогаш од индентитетот

$$\int_0^x y^3\,dt = y^2 \int_0^x y\,dt - 2\int_0^x \Big(yy' \int_0^t y\,du\Big)dt ,$$

а во врска со (1) и (2) добиваме

$$z + 3A\int_0^x z\,dt = By^2 - 2\int_0^x B'By\,dt + 2\int_0^x B'y^2\,dt + 2A\int_0^x By^2\,dt . \tag{3}$$

Со оглед на тоа дека

$$A\int_0^x By^2\,dt = A\Big[By\int_0^x\Big[(b'y + By')\int_0^x y\,du\Big]dt\Big] =$$

$$= B^2y - By^2 - \int_0^x B^2B'\,dt + \int_0^x B'y^2\,dt + A\int_0^x B^2y\,dt - A\int_0^x By^2\,dt ,$$

односно поврзувајќи го почетокот и крајот, за интегралот, добиваме

$$2A\int_0^x By^2\,dt = B^2y - By^2 - \int_0^x B^2B'\,dt + \int_0^x B'y^2\,dt + A\int_0^x B^2y\,dt .$$

Сега со замена на последното, во равенката (3), добиваме

$$z + 3A\int_0^x z\,dt = B^2y - \int_0^x B^2B'\,dt + 3\int_0^x B'y^2\,dt - 2\int_0^x B'By\,dt + A\int_0^x B^2y\,dt . \tag{4}$$

Со пресметување на последниот од интегралите во десната страна на равенката (4) добиваме

$$A\int_0^x B^2y\,dt = B^3 - B^2y - 2\int_0^x B^2B'\,dt + 2\int_0^x BB'y\,dt ,$$

односно, со замена на сето тоа во (4), по куси пресметки добиваме

$$z + 3A\int_0^x z\,dt = B_0^3 + 3\int_0^x B'y^2\,dt . \tag{5}$$

Со интегрирање, на последната равенка, во граници од 0 до x се добива

$$\int_0^x z\,dt + 3A\int_0^x\int_0^x z\,du\,dt - B_0^3 x = 3\int_0^x\int_0^x B'y^2\,du\,dt. \tag{6}$$

За интегралот во десната страна на равенката (6) имаме

$$A\int_0^x\int_0^x B'y^2\,du\,dt = \int_0^x B'By\,dt - \int_0^x B'y^2\,dt - \int_0^x\int_0^t B''By\,du\,dt - \int_0^x\int_0^t B'^2B\,du\,dt +$$

$$+ A\int_0^x\int_0^t B'By\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t B''y^2\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t B'^2y\,du\,dt - A\int_0^x\int_0^x B'y^2\,du\,dt,$$

односно со поврзување на почетокот и крајот, за двојниот интеграл имаме

$$2A\int_0^x\int_0^x B'y^2\,du\,dt =$$

$$= -\int_0^x\int_0^t B'^2B\,du\,dt - \int_0^x B'y^2\,dt + \int_0^x B'By\,dt - \int_0^x\int_0^t B''By\,du\,dt +$$

$$+ \int_0^x\int_0^t B''y^2\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t B'^2y\,du\,dt + \int_0^x B'B^2\,dt - \int_0^x B'By\,dt -$$

$$- \int_0^x\int_0^t (B'B)'B\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t B''By\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t B'^2y\,du\,dt =$$

$$= -\int_0^x\int_0^t B'^2B\,du\,dt + \int_0^x B'B^2\,dt - \int_0^x\int_0^t (B'B)'B\,du\,dt -$$

$$- \int_0^x B'y^2\,dt + \int_0^x\int_0^t B''y^2\,du\,dt + 2\int_0^x\int_0^t B'^2y\,du\,dt.$$

Ако означиме:

$$B(0) = B_0, \quad B'(0) = B_0', \quad B''(0) = B_0'',$$

по извесни пресметки добиваме

$$2A\int_0^x\int_0^x B'y^2\,du\,dt = B_0^2B_0'x - \int_0^x B'y^2\,dt + \int_0^x\int_0^t B''y^2\,du\,dt + 2\int_0^x\int_0^t B'^2y\,du\,dt.$$

Сега за $B'(x) \neq 0$ добиваме

$$2A\int_0^x\int_0^x B'y^2\,du\,dt = B_0^2B_0'x - \int_0^x B'y^2\,dt + \int_0^x\Big(\frac{B''}{B'}\int_0^t B'y^2\,du\Big)dt -$$
$$-\int_0^x\int_0^t\Big(\Big(\frac{B''}{B'}\Big)'\int_0^u y^2\,dv\Big)\,du\,dt + 2\int_0^x\int_0^t B'^2y\,du\,dt\,.$$

Ако, на овој начин добиеното за интегралот од десната страна на равенката (6), го вратиме во (6) и притоа имаме во вид (5) ја добиваме интегралната равенка

$$\begin{aligned} z &+ \int_0^x\Big(5A - \frac{B''}{B'}\Big)z\,dt + \int_0^x\Big[\Big(6A - 3A\,\frac{B''}{B'}\Big)\int_0^t z\,du\Big]dt + \\ &+ \int_0^x\int_0^t\Big(\frac{B''}{B'}\Big)'z\,du\,dt + 3A\int_0^x\int_0^t\Big[\Big(\frac{B''}{B'}\Big)'\int_0^u z\,du\,dt = \\ &= B_0^3\Big[1 + 2Ax - \frac{B_0''}{B_0'}\,x\Big] + 3B_0'B_0^2x + \int_0^x\int_0^t B'^2y\,du\,dt\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Од причини за покуси записи ги воведуваме ознаките:

$$\frac{B''}{B'} = C(x)\,,\quad C_0 = C(0)\,.$$

Притоа, ако се има во вид уште и равенството

$$\int_0^x\int_0^t\Big(C'\int_0^u z\,dv\Big)du\,dt = \int_0^x\Big(C\int_0^t z\,du\Big)dt - \int_0^x\int_0^t Cz\,du\,dt\,, \tag{8}$$

од равенката (7) ја добиваме следнава равенка

$$\begin{aligned} z &+ \int_0^x(5A - C)z\,dt + \int_0^x\int_0^t[6A^2 - 3AC + C']z\,du\,dt - \\ &- B_0^3\Big[1 + 2Ax - Cx + \frac{B_0'}{B_0}\,x\Big] = 6\int_0^x\int_0^t B'^2y\,du\,dt\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Ако ја означиме сега левата страна на равенката (9) со L, а потоа равенката (9) ја интегрираме, во граници од 0 до x, ја добиваме равенката

$$\int_0^x L\,dt = 6\int_0^x\int_0^t\int_0^u B'^2y\,dv\,du\,dt\,. \tag{10}$$

Сега, за интегралот од десната страна на равенката (**10**) во врска со (1) добиваме:

$$A\int_0^x\int_0^t\int_0^u B'^2 y\,dv\,du\,dt=\frac{1}{2}(B_0')^2B_0x+\int_0^x\int_0^t\int_0^u(B')^3\,dv\,du\,dt-\int_0^x\int_0^t B'^2 y\,du\,dt+$$

$$+2\int_0^x\int_0^t\Big(C\int_0^u B'^2 y\,dv\Big)du\,dt-2\int_0^x\int_0^t\int_0^u\Big(C'\int_0^v B'^2 y\,ds\Big)dv\,du\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}(B_0')^2B_0x^2+\int_0^x\int_0^t\int_0^u(B')^3\,dv\,du\,dt-\int_0^x\int_0^t B'^2 y\,du\,dt+$$

$$+2\int_0^x\Big(C\int_0^t\int_0^u B'^2 y\,dv\,du\Big)dt-4\int_0^x\int_0^t\Big(C'\int_0^u\int_0^v B'^2 y\,ds\,dv\Big)du\,dt+$$

$$+2\int_0^x\int_0^t\int_0^u\Big(C''\int_0^v\int_0^s B'^2 y\,dq\,ds\Big)dv\,du\,dt\,.$$

Ако, на овој начин добиеното за интегралот во левата страна на (10) го вратиме назад во (10) и притоа имаме во вид (9) и замената на нејзината лева страна ја добиваме интегралната равенка

$$L+A\int_0^x L\,dt-2\int_0^x CL\,dt+4\int_0^x\int_0^t C'L\,du\,dt-2\int_0^x\int_0^t\int_0^v C''L\,dv\,du\,dt=$$
$$=3(B_0')^2B_0x+6\int_0^x\int_0^t\int_0^u(B')^3dv\,du\,dt\,. \tag{11}$$

Сега од (11), со замена за L на левата страна на (9), добиваме

$$z+\int_0^x(5A-C)z\,dt+\int_0^x\int_0^t[6A^2-3AC+C']z\,du\,dt+$$

$$+A\int_0^x\int_0^t(5A-C)z\,du\,dt+A\int_0^x\int_0^t\int_0^u[6A^2-3AC+C']z\,dv\,du\,dt-2\int_0^x Cz\,dt-$$

$$-2\int_0^x C\int_0^t(5A-C)z\,du\,dt-2\int_0^x C\int_0^t\int_0^u[6A^2-3AC+C']z\,dv\,du\,dt+4\int_0^x\int_0^t C'z\,du\,dt+$$

$$+4\int_0^x\int_0^t C'\int_0^u(5A-C)z\,dv\,du\,dt+4\int_0^x\int_0^t C'\int_0^u\int_0^v[6A^2-3AC+C']z\,ds\,dv\,du\,dt-$$

$$-2\int_0^x\int_0^t\int_0^u C''z\,dv\,du\,dt-2\int_0^x\int_0^t\int_0^u C''\int_0^v(5A-C)z\,ds\,dv\,du\,dt-$$

$$-2\int_0^x\int_0^t\int_0^u C''\int_0^v\int_0^s[6A^2-3AC+C']z\,dq\,ds\,dv\,du\,dt=$$

$$=3(B_0')^2B_0x+6\int_0^x\int_0^t\int_0^u(B')^3\,dv\,du\,dt+$$

$$+B_0^3\Big\{1+2Ax-C_0x+3\,\frac{B_0'}{B_0}\,x+A\int_0^x\Big(1+2At-C_0t+3\,\frac{B_0'}{B}\,t\Big)\,dt-$$

$$-2\int_0^x C(1+2At-C_0t+3\,\frac{B_0'}{B_0}\,t\Big)dt+4\int_0^x\int_0^t C'\Big(1+2Au-C_0u+3\,\frac{B_0'}{B_0}\,u\Big)du\,dt-$$

$$-2\int_0^x\int_0^t\int_0^u C''(1+2Av-Cv+3\,\frac{B_0'}{B_0}\,v\Big)dv\,du\,dt\Big\}\,.$$

Лесно може да се пресмета дека десната страна (DS) на последната равенка изнесува:

$$(\mathrm{DS})=B_0^3\Big\{1+3\Big(A-C_0+\frac{B_0'}{B_0}\Big)x+\Big[C_0'+\Big(2A-C_0+3\,\frac{B_0'}{B_0}\Big)\Big(\frac{A}{2}-C_0\Big)+$$

$$+3\,\Big(\frac{B_0'}{B_0}\Big)^2\Big]x^2\Big\}+6\int_0^x\int_0^t\int_0^u(B')^3\,dv\,du\,dt\,. \qquad (12)$$

За левата страна (LS) на последната равенка, во врска со (8) по извесни пресметки добиваме

$$(\mathrm{LS})=z+\int_0^x(6A-3C)z\,dt=\int_0^x\int_0^t(11A^2-14AC+5C'+2C^2)z\,du\,dt+$$

$$+\int_0^x\int_0^t\int_0^u(6A^3-15A^2C+6AC^2+11AC'-2C''-4CC')z\,dv\,du\,dt\,. \quad (13)$$

Ако ги изедначиме (LS) и (DS) добиени со равенките (12) и (13), а воедно го имаме во вид равенството на Коши

$$\int_0^x\int_0^t\cdots\int_0^u f(v)\,dv\cdots dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)\,dt\,, \qquad (14)$$

ја добиваме следнава интегрална равенка

$$z+\int_0^x\Big\{6A-3C+(11A^2-14AC+5C'+2C^2)(x-t)+$$

$$+\frac{1}{2}(6A^3-15A^2C+6AC^2+11AC'-4CC'-2C'')(x-t)^2\Big\}z\,dt=$$

$$= B_0^3\Big\{1 + 3\Big(A - C_0 + \frac{B_0'}{B_0}\Big)x + \Big[C_0' + \Big(2A - C_0 + 3\,\frac{B_0'}{B_0}\Big)\Big(\frac{A}{2} - C_0\Big) +$$

$$+ 3\Big(\frac{B_0'}{B_0}\Big)^2\Big]x^2\Big\} + 6\int_0^x\int_0^t\int_0^u (B')^3\,dv\,du\,dt\,. \tag{15}$$

Од начинот како ја добиваме оваа равенка следува дека ја докажавме следната теорема:

Теорема 1. Интегралната равенка (15) има особина нејзиното решение да биде трет степен од решението на равенката (1) и притоа $A = \text{const.}$, а $B = B(x)$ е произволна четирипати диференцијабилна функција.

Пример 1. Интерггралната равенка

$$y + 2\int_0^x y(t)\,dt = 2 - e^{-x}\,,$$

има решение

$$y = e^{-x}\,.$$

Соодветната интегрална равенка (15) гласи

$$z + \int_0^x [15 + 74(x-t) + 60(x-t)^2]z\,dt = \frac{11}{9} + \frac{20}{3}\,x + 20x^2 - e^{-3x}\,.$$

Со проверка лесно се констатира дека, решението на последната интегрална равенка е

$$z = e^{-3x}\,,$$

односно, трет степен од решението на првата интегрална равенка.

II. Да претпоставиме сега дека во интегралната равенка (1) $A = A(x) \neq 0$ и $B = B(x)$ се произволни четирипати диференцијабилни функции. Тогаш ги имаме следните релации:

$$\int_0^x y\,dt = \frac{B-y}{A}\,, \quad y' = A\Big(\frac{B}{A}\Big)' + \frac{A'}{A}\,y - Ay\,. \tag{16}$$

Ако тргнеме од идентитетот:

$$\int_0^x y^3\,dt = y^2\int_0^t\Big(yy'\int_0^t y\,du\Big)dt\,,$$

во врска со (3) и (16) добиваме:

$$\int_0^x z\,dt = y\,\frac{B-y}{A} - 2\int_0^x y\Big[A\Big(\frac{B}{A}\Big)' + \frac{A'}{A}\,y - Ay\Big]\frac{B-y}{A}\,dt =$$

$$= \frac{B}{A}\,y^2 - \frac{1}{A}\,z - 2\int_0^x B\Big(\frac{B}{A}\Big)'y\,dt - 2\int_0^x \frac{A'B}{A^2}\,y^2\,dt +$$

$$+ 2\int_0^x By^2\,dt + 2\int_0^x\Big(\frac{B}{A}\Big)'y^2\,dt + 2\int_0^x \frac{A'}{A^2}\,z\,dt - 2\int_0^x z\,dt\,.$$

односно добиваме:

$$\begin{aligned} &- z + 3\int_0^x z\,dt - 2\int_0^x \frac{A'}{A^2}\,z\,dt = \\ &= \frac{B}{A}\,y^2 - 2\int_0^x B\Big(\frac{B}{A}\Big)'y\,dt + 2\int_0^x\Big[\Big(\frac{B}{A}\Big)' - \frac{A'B}{A^2}\Big]y^2\,dt + 2\int_0^x By^2\,dt\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Со пресметување на последниот интеграл од десната страна на равенката (17), а во врска со (16), имаме

$$\int_0^x By^2\,dt = \frac{B^2}{A}\,y - \frac{B}{A}\,y^2 - \int_0^x \frac{BB'}{A}\,y\,dt - \int_0^x B^2\Big(\frac{B}{A}\Big)'\,dt - \int_0^x \frac{A'B^2}{2}\,y\,dt +$$

$$+ \int_0^x B^2 y\,dt + \int_0^x \frac{B'}{A}\,y^2\,dt + \int_0^x B\Big(\frac{B}{A}\Big)'y\,dt + \int_0^x \frac{A'B}{A^2}\,y^2\,dt - \int_0^x By^2\,dt\,.$$

Од каде што, со мали пресметки, за бараниот интеграл наоѓаме дека

$$2\int_0^x By^2\,dt = -\frac{B}{A}\,y^2 + \frac{B_0^3}{A_0} + 2\int_0^x B\Big(\frac{B}{A}\Big)'y\,dt + \int_0^x \frac{A'B + B'A}{A^2}\,y^2\,dt\,.$$

Сега равенката (17) станува:

$$\frac{1}{A}\,z + \int_0^x\Big(3 - 2\,\frac{A'}{A^2}\Big)z\,dt - \frac{B_0^3}{A_0} = 3\int_0^x\Big(\frac{B}{A}\Big)'y^2\,dt\,. \tag{18}$$

Од причини за покуси записи во понатамошното разгледување ги воведуваме следните ознаки:

$$C = \frac{B}{A}\,, \quad L = \frac{1}{A}\,z + \int_0^x\Big(3 - 2\,\frac{A'}{A^2}\Big)\,z\,dt - \frac{B_0^3}{A_0}\,. \tag{19}$$

Со нивна помош интегралната равенка (18) може да се напише во следниов вид:

$$L = 3\int_0^x C'y^2\,dt\,, \tag{20}$$

Со интегрирање на равенката (20), во граници од 0 до x, ја добиваме равенката

$$\int_0^x L\,dt = \int_0^x\int_0^t C'y^2\,du\,dt\,. \tag{21}$$

За интегралот од десната страна на интегралната равенка (21), а во врска со (16) и (19) имаме

$$\int_0^x\int_0^t C'y^2\,du\,dt = \int_0^x C'Cy\,dt - \int_0^x \frac{1}{A}C'y^2\,dt - \int_0^x\int_0^t C''Cy\,du\,dt - \int_0^x\int_0^t BC'^2\,du\,dt -$$

$$-\int_0^x\int_0^t \frac{1}{A}C'A'Cy\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t C'By\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t \frac{1}{A}C''y^2\,du\,dt +$$

$$+\int_0^x\int_0^t C'^2y\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t \frac{A'}{A^2}C'y^2\,du\,dt - \int_0^x\int_0^t C'y^2du\,dt\,.$$

Односно, за $C'(x) \neq 0$, добиваме

$$2\int_0^x\int_0^t C'y^2\,du\,dt = -\frac{1}{A}\int_0^x C'y^2\,dt + \int_0^x\Big[\Big(\frac{1}{A}\Big)'\int_0^t C'y^2\,du\Big]dt +$$

$$+\int_0^x\Big[\frac{C''}{AC'}\int_0^t C'y^2\,du\Big]dt - \int_0^x\int_0^t\Big[\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'\int_0^u C'y^2\,dv\Big]du\,dt -$$

$$-\int_0^x\Big[\Big(\frac{1}{A}\Big)'\int_0^t C'y^2\,du\Big]dt + \int_0^x\int_0^t\Big[\Big(\frac{1}{A}\Big)''\int_0^u C'y^2\,dv\Big]du\,dt -$$

$$-\int_0^x\int_0^t BC'^2\,du\,dt + \int_0^x CC'y\,dt - \int_0^x\int_0^t CC''y\,du\,dt + \int_0^x C'B\Big(C - \frac{y}{A}\Big)dt -$$

$$-\int_0^x\int_0^t (C'B)'\Big(C - \frac{y}{A}\Big)du\,dt - \int_0^x\int_0^t \frac{C'A'C}{A}y\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t C'^2y\,du\,dt =$$

$$= -\frac{1}{A}\int_0^x C'y^2\,dt + \int_0^x\Big[\frac{C''}{AC'}\int_0^t C'y^2\,du\Big]dt - \int_0^x\int_0^t\Big[\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'\int_0^u C'y^2\,dv\Big]du\,dt +$$

$$+\int_0^x\int_0^t\Big[\Big(\frac{1}{A}\Big)''\int_0^u C'y^2\,dv\Big]du\,dt + \int_0^x C'BC\,dt - \int_0^x\int_0^t (C'B)'C\,du\,dt -$$

$$-\int_0^x\int_0^t BC'^2\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t \frac{C'B'}{A}y\,du\,dt - \int_0^x\int_0^t \frac{C'A'C}{A}y\,du\,dt + \int_0^x\int_0^t C'^2y\,du\,dt\,.$$

Ако се има во вид дека

$$\int_0^x C'BC\,dt - \int_0^x\int_0^t (C'B)'C\,du\,dt - \int_0^x\int_0^t BC'^2\,du\,dt = C_0'C_0B_0x\,,$$

во врска со (20), за интегралот од десната страна на (21) добиваме

$$3\int_0^x\int_0^t C'y^2\,du\,dt = -\frac{1}{2A}\,L + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{C''}{AC'}\,L\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t \Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'L\,du\,dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t \Big(\frac{1}{A}\Big)'L\,du\,dt + \frac{3}{2}\,C_0'C_0B_0x + 3\int_0^x\int_0^t C'^2y\,du\,dt\,.$$

Со замена на добиената вредност на интегралот во равенката (21) добиваме

$$\frac{1}{2A}\,L + \int_0^x L\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{C''}{AC'}\,L\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t \Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'L\,du\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t \Big(\frac{1}{A}\Big)'L\,du\,dt =$$
$$= \frac{3}{2}\,C_0'C_0B_0x + 3\int_0^x\int_0^t C'^2y\,du\,dt\,. \tag{22}$$

Со замена на вредноста на L од (19) во (22) ја добиваме равенката

$$\frac{1}{2A^2}\,z + \frac{1}{2A}\int_0^x \Big(3 - 2\,\frac{A'}{A^2}\Big)z\,dt + \int_0^x \frac{1}{A}\,z\,dt + \int_0^x\int_0^t \Big(3 - 2\,\frac{A'}{A^2}\Big)z\,du\,dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{C''}{AC'}\,\frac{1}{A}\,z\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{C''}{AC'}\int_0^x \Big(3 - 2\,\frac{A'}{A^2}\Big)z\,du\,dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t \Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'\,\frac{1}{A}\,z\,du\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t \Big(\frac{1}{A}\Big)''\,\frac{1}{A}\,z\,du\,dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t \Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'\int_0^u \Big(3 - 2\,\frac{A'}{A^2}\Big)z\,dv\,du\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t \Big(\frac{1}{A}\Big)''\int_0^u \Big(3 - 2\,\frac{A'}{A^2}\Big)z\,du\,dt =$$
$$= \frac{3}{2}\,C_0'C_0B_0x + 3\int_0^x\int_0^t C'^2y\,du\,dt +$$
$$+\frac{B_0^3}{A_0}\Big[\frac{1}{2A} + x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{C''}{AC'}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t \Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'du\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t \Big(\frac{1}{A}\Big)''du\,dt\Big]\,.$$

Сега, ако за интегралите од левата страна на последната равенка го примениме идентитетот:

$$\int_0^x \Big(A'\int_0^t B\,du\Big)dt = A\int_0^x B\,dt - \int_0^x AB\,dt\,, \tag{23}$$

таа по извесни пресметки станува:

$$\frac{1}{A^2}z+\int_0^x\frac{1}{A}\Big[5-\frac{C''}{AC'}-2\frac{A'}{A^2}\Big]z\,dt+\int_0^x\int_0^t\Big\{\Big(3-2\frac{A'}{A^2}\Big)\Big(2-\frac{A'}{A^2}-\frac{C''}{AC'}\Big)+$$

$$+\frac{1}{A}\Big(\frac{A'}{A^2}+\frac{C''}{AC'}\Big)'\Big\}z\,du\,dt-3C_0'C_0B_0x-\frac{B_0^3}{A_0}\Big[\frac{1}{A_0}+\Big(2-\frac{C_0''}{A_0C_0'}-\frac{A_0'}{A^2}\Big)x\Big]=$$

$$=6\int_0^x\int_0^t C'^2y\,du\,dt\,. \tag{24}$$

Понатаму, од причини за покуси записи левата страна на равенката (24) да ја означиме со L и равенката (24) да ја интегрираме во граници од 0 до x,

$$\int_0^x L\,dt=6\int_0^x\int_0^t\int_0^u C'^2y\,dv\,du\,dt\,. \tag{25}$$

Сега, за интегралот од десната страна на равенката (25) во врска со (1) имаме

$$\int_0^x\int_0^t\int_0^u C'^2y\,dv\,du\,dt=\frac{1}{2}C_0'^2C_0x^2+\int_0^x\int_0^t\int_0^u C'^3\,dv\,du\,dt-\int_0^x\Big(\frac{1}{A}\int_0^t C'^2y\,du\Big)dt+$$

$$+2\int_0^x\Big[\Big(\frac{1}{A}\Big)'\int_0^u\int_0^t C'^2y\,dv\,du\Big]dt-\int_0^x\int_0^t\Big[\Big(\frac{1}{A}\Big)''\int_0^v\int_0^u C'^2y\,ds\,dv\Big]du\,dt+$$

$$+2\int_0^x\Big(\frac{C''}{AC'}\int_0^t\int_0^u y\,dv\Big)du\,dt-4\int_0^x\int_0^t\Big[\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'\int_0^u\int_0^v C'^2y\,ds\,dv\Big]du\,dt+$$

$$+2\int_0^x\int_0^t\int_0^u\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)''\int_0^v\int_0^s C'^2y\,dq\,ds\Big]dv\,du\,dt\,.$$

Во врска со ознаката L за левата страна на равенката (25) добиваме

$$6\int_0^x\int_0^t\int_0^u C'^2y\,dv\,du\,dt=3C_0'^2C_0x^2+6\int_0^x\int_0^t\int_0^u C'^3\,dv\,du\,dt-$$

$$-\frac{1}{A}L+2\int_0^x\Big(\frac{1}{A}\Big)'L\,dt-\int_0^x\int_0^t\Big(\frac{1}{A}\Big)''L\,du\,dt+$$

$$+2\int_0^x\frac{C''}{AC'}L\,du\,dt-4\int_0^x\int_0^t\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'L\,du\,dt+2\int_0^x\int_0^t\int_0^u\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)''L\,dv\,du\,dt\,.$$

Со замена на вредноста на L, како лева страна на равенката (24), во последната равенка добиваме:

$$\frac{1}{A^3}z+\frac{1}{A}\int_0^x\frac{1}{A}[.]z\,dt+\frac{1}{A}\int_0^x\int_0^t\{.\}z\,du\,dt+\int_0^x\frac{1}{A^2}z\,dt+\int_0^x\int_0^t\frac{1}{A}[.]z\,du\,dt+$$

$$+\int_0^x\int_0^t\int_0^u\{.\}z\,dv\,du\,dt-2\int_0^x\Big(\frac{1}{A}\Big)'\frac{1}{A^2}z\,dt-2\int_0^x\Big(\frac{1}{A}\Big)'\int_0^t\frac{1}{A}[.]z\,du\,dt+$$

$$+\int_0^x\int_0^t\Big(\frac{1}{A}\Big)''\frac{1}{A^2}z\,du\,dt-2\int_0^x\Big(\frac{1}{A}\Big)'\int_0^t\int_0^u\{.\}z\,dv\,du\,dt+$$

$$+\int_0^x\int_0^t\Big(\frac{1}{A}\Big)''\int_0^u\frac{1}{A}[.]z\,dv\,du\,dt+\int_0^x\int_0^t\Big(\frac{1}{A}\Big)''\int_0^v\int_0^v\{.\}z\,ds\,dv\,du\,dt-$$

$$-2\int_0^x\frac{C''}{AC'}\frac{1}{A^2}z\,dt-2\int_0^x\frac{C''}{AC'}\int_0^t\frac{1}{A}[.]z\,du\,dt-2\int_0^x\frac{C''}{AC'}\int_0^t\int_0^u\{.\}z\,dv\,du\,dt+$$

$$+4\int_0^x\int_0^t\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'\frac{1}{A^2}z\,du\,dt+4\int_0^x\int_0^t\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'\int_0^u\frac{1}{A}[.]z\,dv\,du\,dt+$$

$$+4\int_0^x\int_0^t\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'\int_0^u\int_0^v\{.\}z\,ds\,dv\,du\,dt-2\int_0^x\int_0^t\int_0^u\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)''\frac{1}{A^2}z\,dv\,du\,dt-$$

$$-2\int_0^x\int_0^t\int_0^u\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)''\int_0^v\frac{1}{A}[.]z\,ds\,dv\,du\,dt-2\int_0^x\int_0^t\int_0^u\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)''z\,ds\,dv\,du\,dt=$$

$$=\frac{1}{A}(.)+\int_0^x(.)dt-2\int_0^x\Big(\frac{1}{A}\Big)'(.)dt+\int_0^x\int_0^t\Big(\frac{1}{A}\Big)''(.)du\,dt-2\int_0^x\frac{C''}{AC'}(.)dt+$$

$$+4\int_0^x\int_0^t\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'(.)du\,dt-2\int_0^x\int_0^t\int_0^u\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)''(.)dv\,du\,dt+$$

$$+3C_0'^2C_0x^2+6\int_0^x\int_0^t\int_0^u C'^3\,dv\,du\,dt\,.$$

Од причини за покуси записи имаме означено:

$$[.]=5-\frac{C''}{AC'}-2\frac{A'}{A^2},$$

$$\{.\}=\Big(3-2\frac{A'}{A^2}\Big)\Big(2-\frac{A'}{A^2}-\frac{C''}{AC'}\Big)+\frac{1}{A}\Big(\frac{A'}{A^2}+\frac{C''}{AC'}\Big)',\qquad(26)$$

$$(.)=3C_0'C_0B_0x-C_0B_0^2\Big[\frac{1}{A_0}+\Big(2-\frac{C_0''}{A_0C_0'}-\frac{A_0'}{A_0^2}\Big)x\Big].$$

За левата страна на последната равенка со примена на идентитетот (23) добиваме

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{LS}) &= \frac{1}{A^3}\, z + \int_0^x \Big[\frac{1}{A^2} + \frac{2}{A^2}\,\frac{A'}{A^2} - \frac{2}{A^2}\,\frac{C''}{AC'} + \frac{1}{A^2}[.]\Big] z\, dt + \\
&+ \int_0^x\int_0^t \Big[\frac{1}{A}[.]\Big(1 + \frac{A'}{A^2} - 2\,\frac{C''}{AC'}\Big) + \frac{1}{A^2}\Big(\frac{!}{A}\Big)'' + \frac{4}{A^2}\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)' + \frac{1}{A}\{.\}\Big] z\, du\, dt + \\
&+ \int_0^x\int_0^t\int_0^u \Big[\Big(1 - \frac{2C''}{AC'}\Big)\{.\} - \frac{2}{A^2}\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'' + \frac{2}{A}\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'[.]\Big] z\, dv\, du\, dt\,.
\end{aligned}
$$

За десната страна по извесни пресметки се добива

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{DS}) &= C_0^2 B_0 \Big[\frac{1}{A_0} + \frac{A_0'}{A_0^2}\, x - \frac{2C_0''}{A_0 C_0'}\, x + \Big(\frac{C''}{AC'}\Big)_0' x^2\Big] + \\
&+ \frac{3}{2}\, C_0' C_0 B_0 x^2 + 3C_0'^2 C_0 x^2 + \Big[\frac{1}{A_0}\, x - \\
&- \frac{C_0''}{A_0 C_0'}\, x^2\Big]\Big[3C_0' C_0 B_0 + C_0 B_0^2\Big(2 - \frac{C_0''}{A_0 C_0'} - \frac{A_0'}{A_0^2}\Big)\Big] + \\
&+ 6\int_0^x\int_0^t\int_0^u C'^3\, dv\, du\, dt\,.
\end{aligned}
$$

Со изедначување на десните страни на последните две равенки, во врска со ознаките (26) и равенството (14) се добива интегралната равенка

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{A^3}\, z + \int_0^x \Big\{\frac{6}{A^2} - \frac{3}{A^2}\,\frac{C''}{AC'} + \frac{1}{A}\Big[11 - 14\,\frac{C''}{AC'} + 2\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)^2 + \frac{5}{A}\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)' + \\
&+ \frac{5A'}{A^2}\,\frac{C''}{AC'} - 4\,\frac{A'}{A^2}\Big](x-t) + \frac{1}{2}\Big[6 - 7\,\frac{A'}{A^2} + 2\Big(\frac{A'}{A^2}\Big)^2 + \frac{1}{A}\Big(\frac{A'}{A^2}\Big)' + \\
&+ \Big(-15 + 16\frac{\dot{A}'}{A^2} - 4\Big(\frac{A'}{A^2}\Big)^2 \frac{2}{A}\Big(\frac{A'}{A^2}\Big)'\Big)\frac{C''}{AC'} + \Big(\frac{C''}{AC'}\Big)^2\Big(6 - 4\,\frac{A'}{A^2}\Big) + \\
&+ \Big(\frac{C''}{AC'}\Big)'\Big(\frac{11}{A} - \frac{4}{A}\,\frac{A'}{A^2} - 4\,\frac{C''}{A^2 C'} - \frac{2}{A^2}\Big(\frac{C''}{AC'}\Big)''\Big](x-t)^2\Big\} z\, dt = \\
&= C_0 B_0 \Big[\frac{1}{A_0} + \frac{A_0'}{A_0^2}\, x - 2\,\frac{C_0''}{A_0 C_0'}\, x + \Big(\frac{C''}{AC'}\Big)' x^2\Big] + \qquad (27)
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{1}{A_0}x - \frac{C_0''}{A_0C_0'}x^2\right)\left[3C_0'C_0B_0 + C_0B_0^2\left(2 - \frac{C_0''}{A_0C_0'} - \frac{A_0'}{A_0^2}\right)\right] + \frac{3}{2}C_0'C_0B_0x^2 +$$

$$+C_0B_0^2\left[\frac{1}{A_0}x + \left(2 - \frac{C_0''}{A_0C_0'} - \frac{A_0'}{A_0^2}\right)\frac{x^2}{2}\right] + 3C_0'^2C_0x^2 + 6\int_0^x\int_0^t\int_0^u C'^3\,dv\,du\,dt\,.$$

Ако, $c'(x) = 0$ тогаш ја добиваме равенката

$$\frac{1}{A}z + \int_0^x\left(3 - 2\frac{A'}{A^2}\right)z\,dt = \frac{B_0^3}{A_0}\,. \tag{28}$$

Со ова ја докажавме теоремата:

Теорема 2. Интегралните равенки (27), односно (28) имаат особина нивните решенија да бидат трет степен од решението на интегралната равенка (1), кај која $A = A(x) \neq 0$ и $B = B(x)$ се произволни четирипати диференцијабилни функции ако $c'(x) \neq 0$, односно ако $c(x) = 0$.

Да забележиме дека за $A = \text{const}$. од интегралната равенка (28) ја добиваме интегралната равенка (15).

Пример 2. Интегралната равенка

$$y + e^x\int_0^x y(t)dt = e^{2x}$$

има решение $y = e^x$.

Од равенката (27) со замена на соодветните функции се добива интегралната равенка

$$e^{3x}z + \int_0^x[6e^{2t} - 3e^{-3t} + (11e^{-t} - 18e^{-2t} + 2e^{-3t})(x-t) +$$

$$+(6 - 11e^{-t} + 6e^{-2t})(x-t)^2]z\,dt = \frac{7}{9} + \frac{7}{3}x - \frac{1}{2}x + \frac{2}{9}e^{3x}\,.$$

Со проверка лесно се констатира дека нејзино решение е $z = e^{3x}$.

Пример 3. Интегралната равенка

$$y + e^x\int_0^x y\,dt = 3e^x\,,$$

има решение $y = 3e^{1+x-e^x}$ и го задоволува условот $c'(x) = 0$. За овој случај интегралната равенка (28) гласи

$$z + e^x \int_0^x (3 - 2e^{-t}) z \, dt = 27e^x \, .$$

Лесно се проверува дека последната равенка има решение

$$z = 27e^{3(1+x-e^x)} \, .$$

Литература:

[1] Goursat E.: *Cours d'analyse mathematique*, Paris (1942).

[2] Димов Л. А.: *Прилог кон теоријата на решавањето на линеарните интегрални равенки на Волтерра*, докторска дисертација, Скопје (1995).

[3] Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.: *Интегральные уравнения, издательство Наука, Москва (1976).*

[4] Trajan Lalesko: *Introduction a la theorie des equations integrales*, Paris (1912).

[5] Šapkarev I. A.: *Grades of the solutions of more simple as solutions of more complex Volterra linear integral equations*, Proceedings of the mathematical conference in Priština, 95-99 (1993).

FOR A VOLTERRA LINEAR INTEGRAL EQUATION, WHOSE SOLUTION IS CUBE OF THE SOLUTION OF A MORE SIMPLE VOLTERRA LINEAR INTEGRAL EQUATION

Dimov A. Lazo

Summary

One of the methods for solving exactly differential equations, according to the theory, is reducting them to differential equations of lower order. That's why many of the authors were treating the problems of forming differential equation whose solution is a grade of the solution of a differential equation of lower order.

Here, we form Volterra linear integral equations of second type whose solutions are cubes of the solutions of more simple Volterra linear integral equations, given in advance. We use a method which is improved in comparison with the method given in [5].

Mašinski fakultet
P. fah 464
91000 Skopje
MAKEDONIJA