Математички Билтен
20 (XX)
1996 (87–90)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ЗА ЕДНА ОЦЕНКА НА ПОГРЕШНОСТА НА КВАДРАТУРНИОТ МЕТОД ПРИ РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

В. Бабинкостов

Апстракт

Во презентираната тука работа, користејќи ја методологијата применувана во [2], се дава една оценка за решението на линеарната диференцијална равенка.

$$y' + a(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

добиено со помош на методот на механичките квадратури [1]. Врз основа на оваа оценка може да се суди за степенот на точноста и конвергентноста на применуваниот квадратурен метод.

Имено, знаејќи дека при дадени функции $a = a(x) \in C\{[x_0, X]\}$. $f = f(x) \in C\{[x_0, X]\}$, равенката (1) има единствено решение $y = y(x) \in C^{(1)}\{[x_0, X]\}$, ја запишуваме истата во интегрална фомра

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \big(f(t) - a(t)\,y(t)\big)\,dt \tag{2}$$

и земајќи мрежа од точки $x_i = x_0 + ih \in [x, X]$ $\big(h > 0, i = 0, 1, \ldots, n;$ $x_n \leq X < x_0 + (n+1)x_0\big)$ со користење на некоја од квадратурните формули наоѓаме:

$$y(x_i) = y(x_0) + h\sum_{j=0}^{i} \alpha_{ij}\big(f(x_j) - a(x_j)\,y(x_j)\big) + 0(h^s) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{3}$$

каде α_{ij} и $O(h^s)$ се соодветни квадратурни коефициенти и остаток.

По испуштање на остатокот во (3), за определување на приближните вредности y_t на решението $y(x)$ во точките x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, при вредности $f(x_j) \approx f_j$, $a(x_j) \approx a_j$, се добива линеарниот систем

$$y_i = y_0 + h \sum_{j=0}^{i} \alpha_{ij} \, (f_j - a_j y_j) \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{4}$$

од кој при чекор h избран така што да биде $1 - h\alpha_{ii} \neq 0$, наоѓаме:

$$y_i = (1 - h\alpha_{ii})^{-1} \left(y_0 + h \sum_{j=0}^{i=1} \alpha_{ij} \, (f_j - a_j y_j) \right) \, (i = 1, 2, \ldots, n) \, . \tag{5}$$

Со цел да добиеме извесна претстава за големината на грешката $\mathcal{E}_i = y(x_i) - y_i$ од (4) и (3) наоѓаме:

$$\begin{aligned} y(x_i) - y_i =& y(x_0) - y_0 + h \sum_{j=0}^{i} \alpha_{ij} \times \\ & \times \big(f(x_j) - f_j + a_j y_j - a(x_j) y(x_j)\big) + 0(h^s) = \\ =& y(x_0) - y_0 + h \sum_{j=0}^{i} \alpha_{ij} \times \\ & \times \big(f(x_j) - f_j\big) - a(x_j)\big(y(x_j) - y_j\big) + y_j\big(a_j - a(x_j)\big)\big) + 0(h^s), \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i =& \mathcal{E}_0 - h \sum_{j=0}^{i} \alpha_{ij} a(x_j) \mathcal{E}_j + h \sum_{j=0}^{i} \alpha_{ij}\big(f(x_j) - f_j\big) + \\ & + h \sum_{j=0}^{i} \alpha_{ij} y_j \big(a_j - a(x_j)\big) + 0(h^s) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \, . \end{aligned} \tag{6}$$

Ако во (6) се прејде на апсолутни вредности при

$$\max_{\mathrm{ij}} |\alpha_{ij}| = \alpha \, , \qquad \max_{\mathrm{j}} |a(x_{ij})| = A \, , \qquad \max_{\mathrm{j}} |y_j| = M \, ,$$

$$\max_{\mathrm{j}} |f(x_j) - f_j| = \delta \, , \qquad \max_{\mathrm{j}} |a(x_j) - a_j| = \eta$$

и константа $L > 0$ со особина $0(h^s)) \leq Lh^s$, можеме да запишеме

$$|\mathcal{E}_i| \leq |\mathcal{E}_0| + h\alpha A \sum_{j=0}^{i} |\mathcal{E}_j| + h\alpha(\delta + \eta M)(i+1) + Lh^s$$

или

$$\begin{aligned} (1 - h\alpha A)\,|\mathcal{E}_i| &\leq (1 + h\alpha A)\,|\mathcal{E}_0| + h\alpha A \sum_{j=1}^{i-1} |\mathcal{E}_j| + \\ &+ 2\alpha(\delta + \eta M)(X - x_0) + Lh^s\,, \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{7}$$

при што може да се смета дека чекорот h е таков што $0 < 1{-}h\alpha A < 1$.

Ставајќи во (7) последователно $i = 1, 2, \ldots, n = (X - x_0)/h$, добиваме дека при $k \geq 1$ важи

$$|\mathcal{E}_k| \leq (1 - h\alpha A)^{-k}\big((1 + h\alpha A)\,|\mathcal{E}_0| + 2\alpha(\delta + \eta M)(X - x_0) + Lh^s\big)\,. \tag{8}$$

Но при секоја таква вредност k важи

$$(1 - h\alpha A)^{-k} \leq (1 - h\alpha A)^{-(X - x_0)/h}\,,$$

а бидејќи десната страна во последното неравенство тежи при $h \to 0$ кон својата граница $e^{-\alpha A(X - x_0)}$ опаѓајќи, може да се укаже таква вредност h што ќе биде

$$(1 - h\alpha A)^{-(X - x_0)/h} < \gamma\,,$$

па така конечно се собива оценката

$$|\mathcal{E}_k| \leq \gamma\big((1 + h\alpha A)\,|\mathcal{E}_0| + 2\alpha(\delta + \eta M)(X - x_0)\big) + Lh^s \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{9}$$

Врз основа на (9) заклучуваме дека ако δ и η, како и почетната грешка $\mathcal{E}_0$ се големини од s–ти или повисок ред на малост во однос на h, тогаш таков ред на малост има и добиеното решение, а ако $\delta \to 0$, $\eta \to 0$ при $h \to 0$ и примиме $\mathcal{E} = 0$, тогаш $\mathcal{E}_k \to 0$ при $k \to \infty$, односно $y_k \to y(x_k)$ при $k \to \infty$, т.е. таквиот метод конвергира.

Литература

[1] Бабинкостов, В.: *Нумеричко решавање на обичните линеарни диференцијални равенки со помош на квадратурните формули во векторно–матрична форма*, Год. зборник, Математички факултет, **32** (1968).

[2] Микеладзе, Ш. Е.: *Избранные труды, т. 1, 2, „Мецниереба", Тбилиси (1980).*

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕННЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КВАДРАТУРНЫМ МЕТОДОМ

В. Бабинкостов

Р е з ю м е

В данной работе, используя применяемый в [2] прием для оценивания решения интегрального уравнения, оценивается, полученное путем применения квадратурных формул [1], приближенное решение линейного дифференциального уравнения и на этой основе делается заключение о сходимости применяемого метода.

Природно-математички факултет

п. фах 162,

91 000 Скопје,

Македониjа