Мат. Бил. 7-8 (XXXIII-XXXIV),
1983-1984, (10-15),
Скопје, Југославија

# ЗА ЕДНА ФОРМУЛА НА ПОЛИНОМНО РЕШЕНИЕ НА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОРИ РЕД

Боро М. Пиперевски

1. Нека е дадена диференцијална равенка од вид

$$(\alpha_3 t^3+\alpha_2 t^2+\alpha_1 t+\alpha_0)x''+(\beta_2 t^2+\beta_1 t+\beta_0)x'+(\gamma_1 t+\gamma_0)x = 0, \qquad (1.1)$$

каде што $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_0,\beta_2,\beta_1,\beta_0,\gamma_1,\gamma_0$ се константи и $|\alpha_3|+|\alpha_2|+|\alpha_1|+|\alpha_0| > 0$.

Случајот кога $\alpha_3 = \beta_2 = \gamma_1 = 0$, или кога $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$, доведува до диференцијална равенка за која е добиен потребен и доволен услов таа да има едно полиномно решение, дадено со познатата формула на Rodrigues [2,3,6].

Ние во овој труд ќе добиеме услови при кои равенката (1.1) има полиномно решение за кое добиваме и формула слична на формулата на Rodrigues.

За таа цел разгледуваме најпрвин еден специјално избран систем диференцијални равенки од прв ред на кој може да се сведе равенката (1.1), и за него добиваме потребни и доволни услови при кои има полиномно решение кое го добиваме во експлицитна форма.

2. Нека е даден систем линеарни диференцијални равенки од прв ред од вид

$$\begin{aligned} ax_1' + bx_2' + Ax_1 &= 0, \\ cx_1' + dx_2' + Bx_2 &= 0, \end{aligned} \qquad (2.1)$$

каде што $a=a_1t+a_2$, $b=b_1t+b_2$, $c=c_1t+c_2$, $d=d_1t+d_2$, $a_i,b_i,c_i,d_i$ $(i=1,2)$, $A,B$ се константи и $ABbc(ad-bc) \neq 0$.

<u>Дефиниција</u>: За системот (2.1) ќе велиме дека има едно полиномно решение $\{x_1^0(t),x_2^0(t)\}$ од степен $n$, ако $x_1^0$ и $x_2^0$ се полиноми од степени $n-1$ и $n$ соодветно.

<u>ТЕОРЕМА 1.</u>: Системот (2.1) има едно полиномно решение и нема друго полиномно решение од помал степен, ако и само ако постои природен број $n$ за кој се задоволени условите

$$b' = 0, \quad nd'+B = 0, \quad ra'+A \neq 0 \text{ за } r<n \quad (r \in N). \tag{2.2}$$

<u>Доказ</u>: Нека системот (2.1) има едно полиномно решение и тоа од степен $n$ и нека нема друго полиномно решение од степен помал од $n$. После $n$ последователни диференцирања на системот (2.1), се добива

$$\begin{aligned} &ax_1^{(n+1)}+bx_2^{(n+1)}+(na'+A)x_1^{(n)}+nb'x_2^{(n)} = 0, \\ &cx_1^{(n+1)}+dx_2^{(n+1)}+nc'x_1^{(n)}+(nd'+B)x_2^{(n)} = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Од (2.3), поради $x_1^{o\,(n+1)}=x_1^{o(n)} = x_2^{o(n+1)}=0$, $x_2^{o(n)}=\text{const.}(\neq 0)$, следи

$$nb' = 0, \quad nd'+B = 0. \tag{2.4}$$

Равенката

$$\begin{aligned} &(ad-bc)cx''+\{[c(a'+A)-ac']d+ac(B+d')\}x_2' + \\ &\qquad +[c(a'+A)-ac']Bx_2 = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

добиена од системот (2.1) со елиминација на $x_1$, има според претпоставката едно полиномно решение $x_1^o$ од степен $n$ и нема друго полиномно решение од степен помал од $n$. Во согласност со добиените услови (2.4), нејзината карактеристична равенка има два корена $n$ и $(-A/a')$, па можеме да заклучиме дека вториот корен $(-A/a')$, во случај да е природен број, не може да биде помал од природниот број $n$ [1,4,5], што значи дека важи

$$ra'+A \neq 0 \text{ за } r<n \ (r \in N). \tag{2.6}$$

Нека постои природен број $n$ за кој се задоволени условите (2.2). Тогаш равенката

$$\begin{aligned} &(cb-ad)x_1'' + [c'b-d(a'+A)-a(d'+B)]x_1' - \\ &\qquad - A(d'+B)x_1 = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

добиена од системот (2.1) со елиминација на $x_2$, според [1,4,5] има едно полиномно решение $x_1^o$ од степен $n-1$ и нема друго полиномно решение од степен помал од $n-1$.

Од првата равенка на системот (2.1) заклучуваме дека и функцијата $x_2^o$ од решението $\{x_1^o, x_2^o\}$ на системот (2.1), е полином од степен помал или еднаков на $n$. Бидејќи равенката (2.5), во согласност со условите (2.2), не може да има полиномно решение од степен помал од $n$, можеме да заклучиме дека $x_2^o$ е полином од степен $n$. Значи, системот (2.1) има полиномно решение од степен $n$ и нема друго полиномно решение од степен помал од $n$ со што теоремата е докажана.

Со згодно избрана смена

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t)\,\exp[-\int(aB+Ad)/(ad-bc)dt],\\ x_2(t) &= y_2(t)\,\exp[-\int(aB+Ad)/(ad-bc)dt], \end{aligned} \qquad (2.8)$$

системот (2.1) преминува во системот

$$\begin{aligned} -Ady_1' + bBy_2' + ABy_1 &= 0,\\ Acy_1' - aBy_2' + ABy_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Нека системот (2.1) има едно полиномно решение од степен $n$ и нема друго полиномно решение од степен помал од $n$. Да го разгледаме системот

$$\begin{aligned} -Adz_1' + Bbz_2' &= 0,\\ Acz_1' - aBz_2' - nc'Az_1 + (na'+A)Bz_2 &= 0, \end{aligned} \qquad (2.10)$$

кој после $n$ последователни диференцирања и користење на условот (2.2), се сведува на системот (2.9) при што

$$y_1 = z_1^{(n)}, \quad y_2 = z_2^{(n)}. \qquad (2.11)$$

Со елиминација на $z_2$ од (2.10) се добива равенката

$$(ad-bc)z_1'' + [(ad-bc)' + nbc' - (na'+A)d]z_1' = 0,$$

чие едно решение $z_1^o$ е дадено со

$$z_1^{o\prime} = (ad-bc)^{n-1}\exp[\int(aB+Ad)/(ad-bc)dt].$$

Според постапката и во согласност со смените (2.8) и (2.11), користејќи ја и првата равенка на системот (2.10), ги добиваме формулите за полиномното решение на системот (2.1)

$$x_1^o = \{\exp[-\int(aB+Ad)/(ad-bc)dt]\}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\{(ad-bc)^{n-1}\cdot$$

$$\cdot\exp[\int(aB+Ad)/(ad-bc)dt]\},$$

$$x_2^o = (A/Bd)\{\exp[-\int(aB+Ad)/(ad-bc)dt]\}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\{d(ad-bc)^{n-1}\cdot \tag{2.12}$$

$$.\exp[\int(aB+Ad)/(ad-bc)dt]\}.$$

3. Равенката (2.5) е од вид (1.1), па применувајќи ги резултатите добиени во точка 2., можеме да ја формулираме следната теорема.

<u>ТЕОРЕМА 2.</u>: Диференцијалната равенка

$$(t^2+Qt+R)(St+T)x'' + (\beta_2 t^2+\beta_1 t+\beta_0)x' + + (\gamma_1 t+\gamma_0)x = 0, \tag{3.1}$$

има едно полиномно решение и нема второ полиномно решение од помал степен, ако постои природен број n (помалиот ако постојат два) кој е корен на карактеристичната равенка

$$Sn^2 + (\beta_2-S)n + \gamma_1 = 0, \tag{3.2}$$

и ако се задоволени условите

$$S^2(\beta_0+SR-QT) + T^2(S+\beta_2) - T\beta_1 S = 0,$$

$$S^2\gamma_1(SR-QT) + T^2(S+2\beta_2\gamma_1+\gamma_1^2) + \tag{3.3}$$

$$+ \gamma_0(S^2\beta_1-2S\gamma_1 T-2TS\beta_2+\gamma_0 S^2) - T\beta_1 S\gamma_1 = 0.$$

Во тој случај полиномното решение ќе биде дадено со формулата

$$x(t) = \{\exp[-\int(Mt+N)/(t^2+Qt+R)dt]\}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\{(t+K)\cdot \tag{3.4}$$

$$.(t^2+Qt+R)^{n-1}\exp[\int(Mt+N)/(t^2+Qt+R)dt]\},$$

каде што

$$M = (\beta_2-S)/S,\quad N = (\beta_1/S) - (T/S) - (T\beta_2/S^2),$$

$$K = [T\gamma_1-n(S\beta_1-2T\beta_2-T\gamma_1+S\gamma_0)]/S\gamma_1.$$

<u>Доказ</u>: Ставајќи $a=a_1t+a_2$, $b=b_2$, $c=c_1t+c_2$, $d=d_1t+d_2$ во равенката (2.5), лесно се покажува дека равенката (3.1) може да се запише во вид (2.5) ако се задоволени условите (3.3), при што

$$a_1=d_1=1,\quad c_1=S,\quad c_2=T,\quad SB^2+(S-\beta_2)B+\gamma_1 = 0,\quad A=\gamma_4/SB,$$

$$a_2=(STB+T\gamma_1-S\gamma_0)/S^2B,\quad d_2=[B(S\beta_1-2T\beta_2-T\gamma_1+S\gamma_0)+T\gamma_1]/S\gamma_1,$$

$$b_2=(2T/S^2)-(Q/S)+(2T\gamma_1-S\beta_1+2T\beta_2)/(S^3B)-$$
$$-(S-\beta_2)(S\beta_1-2T\beta_2-T\gamma_1+S\gamma_0)+S^3\gamma_1.$$

Нека системот (2.1) има едно полиномно решение, односно равенката (2.5) има едно полиномно решение и нема друго полиномно решение од помал степен. Тогаш во согласност со последните релации, од условот (2.2) се добива условот (3.3). Формулата (3.4) се добива од формулата (2.12). Случајот $c_1=S=0$ повлекува $\gamma_1=\beta_2=0$ па според тоа не е од интерес.

Да забележиме дека равенката (1.1) може секојпат да се запише во вид (3.1), кој е позгоден за добивање на условите (3.2) како и формулата (3.4).

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Abbé Lainé: Sur l'integration de quelques équations differentielles du second ordre; L'Enseignement mathématique 23(1924), 163-173, Paris-Genéve.

[2] Brenke,W.C.: On polynomial solutions of a class of linear differential equations, of the second order; Bulletin of the American Mathematical Society 36(1930), 77-84.

[3] Gonsalves,V.J.: Sur la formul de Rodrigues; Portugale Math. 4(1934), 52-64.

[4] Peron,O.: Über lineare Differenzen-und Differentialgleichungen; Mathematishe Annalen 66(1909), 446-487, Berlin.

[5] Sheffer,I.M.: On the properties of polinomials satisfying a linear differential equation: Part I; Transactions of the American Mathematical Society, 35(1933), 184-214, Menasha-New York.

[6] Šapkarev,I.A.: Über die Rodriguesformel und eine ihre Anwendung; MANU, prilozi IV 1(1983), 85-93, Skopje.