Математички Билтен
27 (LIII)
2003 (75–86)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

GATEAUX ИЗВОДИ НА n-НОРМА

Ристо Малчески

Апстракт

Во оваа работа е воведен поимот парцијален извод на n-нормата по зададен правец (извод на *Gateaux*), за кој се докажани повеќе својства. Разгледан е и фактор-просторот $L/P(x_1,\dots,x_{n-1})$ и за него се покажани низа својства.

Нека L е реален векторски простор со димензија поголема или еднаква на n, $n>1$ и $\|\cdot,\cdot,\dots,\cdot\|$ е реална функција на L^n за која важат условите

i) $\|x_1,x_2,\dots,x_n\|\geq 0$, за секои $x_1,x_2,\dots,x_n\in L$ и $\|x_1,x_2,\dots,x_n\|=0$ ако и само ако множеството $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ е линеарно зависно;

ii) $\|x_1,x_2,\dots,x_n\|=\|\pi(x_1),\pi(x_2),\dots,\pi(x_n)\|$, за секои $x_1,x_2,\dots,x_n\in L$ и за секоја биекција $\pi\colon\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\to\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

iii) $\|\alpha x_1,x_2,\dots,x_n\|=|\alpha|\;\|x_1,x_2,\dots,x_n\|$, за секои $x_1,x_2,\dots,x_n\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$.

iv) $\|x_1+x',x_2,\dots,x_n\|\leq\|x_1,x_2,\dots,x_n\|+\|x_1',x_2,\dots,x_n\|$, за секои $x_1,x_2,\dots,x_n,x_1'\in L$. Функцијата $\|\cdot,\dots,\cdot\|$ се нарекува n-норма на L, а $(L'',\|\cdot,\cdot,\dots,\cdot\|)$ се нарекува n-нормиран простор.

1. Gateaux изводи на n-норма

Нека $(L^n,\|\cdot,\dots,\cdot\|)$ е реален n-нормиран простор и $\phi\colon L\times\dots\times L\to\mathbf{R}$ е произволен n-функционал.

Дефиниција 1. Десен парцијален извод на n-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,\dots,x_n)$ во правец на y е

$$\phi'_{1^+}(x_1,\dots,x_n)(y)=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\phi(x_1+\lambda y,x_2,\dots,x_n)-\phi(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\lambda},$$

ако наведената граница постои.

Лев парцијален извод на n-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,\dots,x_n)$ во правец на y е

$$\phi'_{1^-}(x_1,\dots,x_n)(y)=\lim_{\lambda\to 0^-}\frac{\phi(x_1+\lambda y,x_2,\dots,x_n-\phi(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\lambda},$$

ако наведената граница постои.

Ако левиот и десниот парцијален извод на n -функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,\dots,x_n)$ во правец на y постојат и се еднакви, тогаш ќе велиме дека n -функционалот ϕ е диференцијабилен по x_1 во точката $(x_1,\dots,x_n)$ во правец на y, т.е. постои $\phi'_1(x_1,\dots,x_n)(y)$, при што

$$\phi'_1(x_1,\dots,x_n)(y)=\phi'_{1^+}(x_1,\dots,x_n)(y)=\phi'_{1^-}(x_1,\dots,x_n)(y).$$

Аналогно се дефинираат парцијалните изводи

$$\phi'_i(x_1,\dots,x_n)(y),\ \phi'_{i^+}(x_1,\dots,x_n)(y) \text{ и } \phi'_{i^-}(x_1,\dots,x_n)(y),\ i=2,3,\dots n.$$

Во нашите разгледувања ќе се задржиме само на n-функционалот $\varphi\colon L\times\dots\times L\to R$, дефиниран со

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\|x_1,\dots,x_n\|$$

и неговата диференцијабилност.

Нека $x_1,x_2,\dots,x_n$ $y\in L$ и $t\in\mathbf{R}$. Да ја разгледаме функцијата

$$\delta_1(x_1,\dots,x_n,y,t)=\frac{\|x_1+ty,x_2,\dots,x_n\|-\|x_1,\dots,x_n\|}{t}.$$

Лема 1. Функцијата $t\to\delta_1(x_1,\dots,x_n,y,t)$ е монотоно растечка за $t>0$.

Доказ. Нека $0<t_1<t_2$. Тогаш,

$$\begin{aligned}t_2\|x_1+t_1y,x_2,\dots,x_n\|&=\|t_2x_1+t_1t_2y,x_2,\dots,x_n\|\\&=\|t_1(x_1+t_2y)+(t_2-t_1)x_1,x_2,\dots,x_n\|\\&\le t_1\|x_1+t_2y,x_2,\dots,x_n\|+(t_2-t_1)\|x_1,x_2,\dots,x_n\|\end{aligned}$$

т.е.

$$t_2(\|x_1 + t_1y, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|) \leq$$
$$\leq t_1(\|x_1 + t_2y, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|),$$

односно

$$\frac{\|x_1 + t_1y, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|}{t_1} \leq$$
$$\leq \frac{\|x_1 + t_2y, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|}{t_2}. \qquad \square$$

Последица 1. Функцијата $t \to \delta_1(x_1, \ldots, x_n, y, t)$ е монотоно растечка за $t < 0$.

Доказ. Од дефиницијата на функцијата $\delta_1(x_1, \ldots, x_n, y, t)$ имаме

$$\begin{aligned} -\delta_1(x_1, \ldots, x_n, -y, t) &= -\frac{\|x_1 - ty, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|}{t} \\ &= \frac{\|x_1 + (-t)y, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|}{-t} \\ &= \delta_1(x_1, \ldots, x_n, y, -t). \end{aligned}$$

Сега од лема 1, за $t_1 < t_2 < 0$, добиваме

$$\begin{aligned} -\delta_1(x_1, \ldots, x_n, y, t_1) &= \delta_1(x_1, \ldots, x_n, -y, -t_1) \geq \delta_1(x_1, \ldots, x_n, -y, -t_2) \\ &= -\delta_1(x_1, \ldots, x_n, y, t_2), \end{aligned}$$

т.е.

$$\delta_1(x_1, \ldots, x_n, y, t_1) \leq \delta_1(x_1, \ldots, x_n, y, t_2). \qquad \square$$

Лема 2. На интервалот $(0, \infty)$ функцијата $t \to \delta_1(x_1, \ldots, x_n, y, t)$ е ограничена и важи

$$-\| - y, x_2, \ldots, x_n\| \leq \delta_1(x_1, \ldots, x_n, y, t) \leq \|y, x_2, \ldots, x_n\|.$$

Доказ. Нека $t > 0$. Имаме:

$$\begin{aligned} \|x_1, x_2, \ldots, x_n\| &= \|x_1 + ty - ty, x_2, \ldots, x_n\| \\ &\leq \|x_1 + ty, x_2, \ldots, x_n\| + t\| - y, x_2, \ldots, x_n\| \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} -\| - y, x_2, \ldots, x_n\| &\leq \frac{\|x_1 + ty, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|}{t} \\ &= \delta_1(x_1, \ldots, x_n, y, t). \end{aligned}$$

Од друга страна

$$\begin{aligned}\delta_1(x_1,\dots,x_n,y,t) &= \frac{\|x_1+ty,x_2,\dots,x_n\|-\|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t}\\ &\le \frac{\|x_1,x_2,\dots,x_n\|+t\|y,x_2,\dots,x_n\|-\|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t}\\ &= \|y,x_2,\dots,x_n\|,\end{aligned}$$

со што доказот е завршен. □

Забелешка 1. Аналогно, како и во претходните разгледувања, се докажува дека на интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$ функциите

$$t\to\delta_i(x_1,\dots,x_n,y,t)= \\ =\frac{\|x_1,\dots,x_{i-1},x_i+ty,x_{i+1},\dots,x_n\|-\|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t},\quad i=2,3,\dots,n$$

се монотоно растечки и дека на интервалот $(0,\infty)$ се ограничени, при што важат оценките

$$-\|-y,x_2,\dots,x_n\|\le\delta_i(x_1,\dots,x_n,y,t)\le\|y,x_2,\dots,x_n\|,\quad i=2,3,\dots,n.$$

За функционалот $\varphi(x_1,\dots,x_n)=\|x_1,\dots,x_n\|$, од лема 1 и лема 2 непосредно ја добиваме следната последица.

Последица 2. Нека $(L,\|\cdot,\dots,\cdot\|)$ е реален n-нормиран простор. Тогаш постои

$$\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(y)=\lim_{t\to0^+}\frac{\|x_1+ty,x_2,\dots,x_n\|-\|x_1,\dots,x_n\|}{t},$$

и важи

$$-\|-y,x_2,\dots,x_n\|\le\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(y)\le\|y,x_2,\dots,x_n\|.$$ □

Според тоа, за n-нормата постои десниот *Gateaux* извод во однос на првата променлива.

Теорема 1. За секои $x_1,x_2,\dots,x_n,y,y',\in L$ важат следните својства:

i) $\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(y+y')\le\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(y)+\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(y')$;

ii) За секој $\alpha>0$ важи $\varphi'_{1+}(\alpha x_1,\dots,x_n)(y)=\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(y)$;

iii) За секој $\alpha \geq 0$ важи $\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(\alpha y)=\alpha\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(y)$;

iv) За секој $\alpha \geq 0$ важи $\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(\alpha x_1) = \alpha\|x_1,\dots,x_n\|$; и

v) $\|x_1+ty, x_2,\dots,x_n\| \geq \|x_1,x_2,\dots,x_n\|$, за секој $t \in \mathbf{R}$ ако и само ако

$$-\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(-y) \leq 0 \leq \varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(y).$$

Доказ. i) Од

$$\begin{aligned}&2\|x_1+\frac{t}{2}(y+y'),x_2,\dots,x_n\| \leq\\ &\leq \|x_1+ty,x_2,\dots,x_n\| + \|x_1+ty',x_2,\dots,x_n\|\end{aligned}$$

добиваме

$$\begin{aligned}&2\Big(\|x_1+\frac{t}{2}(y+y'),x_2,\dots,x_n\| - \|x_1,x_2,\dots,x_n\|\Big) \leq\\ &\leq (\|x_1,+ty,x_2,\dots,x_n\| - \|x_1,x_2,\dots,x_n\|)\\ &+(\|x_1+ty',x_2,\dots,x_n\| - \|x_1,x_2,\dots,x_n\|)\end{aligned}$$

т.е.

$$\delta_1\Big(x_1,\dots,x_n,y+y',\frac{t}{2}\Big) \leq \delta_1(x_1,\dots,x_n,y,t)+\delta_1(x_1,\dots,x_n,y',t).$$

Ако во последното неравенство земеме $t \to 0^+$ го добиваме бараното неравенство.

ii) Навистина, ако $\alpha > 0$, тогаш

$$\begin{aligned}\delta_1(\alpha x_1,\dots,x_n,y,t) &= \frac{\|\alpha x_1+ty,x_2,\dots,x_n\| - \|\alpha x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t}\\ &= \frac{\|x_1+\frac{t}{\alpha}y,x_2\dots,x_n\| - \|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{\frac{t}{\alpha}}\\ &= \delta_1\Big(x_1,\dots,x_n,\frac{t}{\alpha}y,t\Big)\end{aligned}$$

и ако земеме $t \to 0^+$ го добиваме бараното равенство.

iii) За $\alpha = 0$ имаме

$$\begin{aligned}&\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(0\cdot y) =\\ &= \frac{\|x_1,\dots,x_n\| - \|x_1,\dots,x_n\|}{t} = 0 = 0\cdot\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(y).\end{aligned}$$

Нека $\alpha > 0$. Тогаш, од

$$\begin{aligned}\delta_1(x_1,\dots,x_n,\alpha y,t) &= \frac{\|x_1+t\alpha y,x_2,\dots,x_n\|-\|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t}\\ &=\alpha\frac{\|x_1+t\alpha y,x_2,\dots,x_n\|-\|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t\alpha}\\ &=\alpha\delta_1(x_1,\dots,x_n,y,t\alpha)\end{aligned}$$

кога $t\to 0^+$ добиваме

$$\varphi'_{1^+}(x_1,\dots,x_n)(\alpha y)=\alpha\varphi'_{1^+}(x_1,\dots,x_n)(y).$$

iv) Нека $\alpha \geq 0$. Тогаш, од

$$\begin{aligned}\delta_1(x_1,\dots,x_n,\alpha x_1,t) &= \frac{\|x_1+t\alpha x_1,x_2,\dots,x_n\|-\|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t}\\ &=\frac{(1+\alpha t)\|x_1,x_2,\dots,x_n\|-\|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t}\\ &=\alpha\|x_1,x_2,\dots,x_n\|\end{aligned}$$

кога $t\to 0^+$ добиваме

$$\varphi'_{1^+}(x_1,\dots,x_n)(\alpha x_1)=\alpha\|x_1,\dots,x_n\|.$$

v) Нека $\|x_1+ty,x_2,\dots,x_n\|\geq\|x_1,x_2,\dots,x_n\|$, за секој $t\in\mathbf{R}$. Тогаш, за секој $t>0$ важи

$$\delta_1(x_1,\dots,x_n,y,t)=\frac{\|x_1+ty,x_2,\dots,x_n\|-\|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t}\geq 0.$$

Ако во последното неравенство земеме $t\to 0^+$, добиваме

$$0\leq\varphi'_{1^+}(x_1,\dots,x_n)(y).$$

Исто така, за секој $t>0$ важи

$$-\delta_1(x_1,\dots,x_n,-y,t)=-\frac{\|x_1-ty,x_2,\dots,x_n\|-\|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t}\leq 0,$$

па затоа кога $t\to 0^+$, добиваме

$$-\varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(-y) \leq 0.$$

Обратно, нека претпоставиме дека

$$-\varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(-y) \leq 0 \leq \varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(y).$$

Ако за некој $t_0 > 0$ важи

$$\|x_1 + t_0 y, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \beta < 0,$$

тогаш

$$\delta_1(x_1,\ldots,x_n,y,t_0) = \frac{\|x_1 + t_0 y, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|}{t_0} = \frac{\beta}{t_0} < 0.$$

Од лема 1 следува дека за секој t, $0 < t < t_0$ важи

$$\delta_1(x_1,\ldots,x_n,y,t) \leq \delta_1(x_1,\ldots,x_n,y,t_0) = \frac{\beta}{t_0} < 0.$$

и ако земеме $t \to 0^+$, добиваме

$$\varphi'_{1+}(x_1,\ldots,x_n)(y) \leq \frac{\beta}{t_0} < 0,$$

што противречи на претпоставката. Јасно, неравенството важи за $t = 0$. Нека сега претпоставиме дека за некој $t_0 < 0$ важи

$$\|x_1 + t_0 y, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = \beta < 0.$$

Тогаш,

$$\begin{aligned}\delta_1(x_1,\ldots,x_n,-y,-t_0) &= \frac{\|x_1 + t_0 y, x_2, \ldots, x_n\| - \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|}{-t_0} \\ &= \frac{\beta}{-t_0} < 0.\end{aligned}$$

Од лема 1 следува дека за секој t, $t_0 < t < 0$ важи

$$\delta_1(x_1,\ldots,x_n,-y,-t) \leq \delta_1(x_1,\ldots,x_n,-y,-t_0) = \frac{\beta}{-t_0} < 0$$

и ако земеме $-t \to 0^+$, добиваме

$$\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(-y) \le \frac{\beta}{-t_0} < 0,$$

т.е.

$$-\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(-y) > 0,$$

што повторно е противречност. □

Лема 3. За секои $x_1,\dots,x_n,y \in L$ важи

$$-\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(-y) = \varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y).$$

Доказ. Имаме:

$$\begin{aligned}\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y) &= \lim_{t\to 0^-}\frac{\|x_1+ty,x_2,\dots,x_n\| - \|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t}\\ &= -\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x_1+t(-y),x_2,\dots,x_n\| - \|x_1,x_2,\dots,x_n\|}{t}\\ &= -\varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(-y)\end{aligned}$$ □

Последица 3. За секои $x_1,\dots,x_n,y,y' \in L$ важат следните својства

i) $-\|y,x_2,\dots,x_n\| \le \varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y) \le \|y,x_2,\dots,x_n\|$.

ii) $\varphi'_{1-}(x_1,x_2,\dots,x_n)(y) + \varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y') \le$
$\le \varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y+y')$;

iii) За $\alpha < 0$, $\varphi'_{1+}(\alpha x_1,x_2,\dots,x_n)(y) = -\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y)$;

iv) За $\alpha \le 0$, $\varphi'_{1+}(x_1,x_2,\dots,x_n)(\alpha y) = \alpha\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y)$;

v) $\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y) \le \varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(y)$.

Доказ. i) Од лема 3 и последица 2 следува

$$-\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y) = \varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(-y) \ge -\|y,x_2,\dots,x_n\|$$

т.е.

$$\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y) \le \|y,x_2,\dots,x_n\|.$$

Слично,

$$-\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y) = \varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(-y) \le \|y,x_2,\dots,x_n\|$$

т.е.

$$-\|y,x_2,\dots,x_n\| \le \varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y).$$

ii) Од лема 3 и теорема 1 добиваме

$$
\begin{aligned}
&-\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y+y') = \varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(-y-y')\\
&\le \varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(-y) + \varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(-y')\\
&= -\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y) - \varphi'_1 - (x_1,\dots,x_n)(y').
\end{aligned}
$$

т.е.

$$
\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y) + \varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y') \le \varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y+y').
$$

iii) За секој $\alpha < 0$, важи

$$
\begin{aligned}
&\varphi'_{1+}(\alpha x_1, x_2,\dots,x_n)(y) =\\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\|\alpha x_1 + ty, x_2,\dots,x_n\| - \|\alpha x_1, x_2,\dots,x_n\|}{t}\\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x_1 + \frac{t}{-\alpha}(-y), x_2,\dots,x_n\| - \|x_1, x_2,\dots,x_n\|}{\frac{t}{-\alpha}}\\
&= \varphi'_{1+}(x_1, x_2,\dots,x_n)(-y) = -\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y).
\end{aligned}
$$

iv) За $\alpha = 0$ имаме

$$
\begin{aligned}
0\cdot\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y) = 0 &= \varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(0)\\
&= \varphi'_{1+}(x_1,\dots,x_n)(0\cdot y).
\end{aligned}
$$

За секој $\alpha < 0$, важи

$$
\begin{aligned}
&\varphi'_{1+}(x_1, x_2,\dots,x_n)(\alpha y) =\\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x_1 + t\alpha y, x_2,\dots,x_n\| - \|x_1, x_2,\dots,x_n\|}{t}\\
&= \alpha \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x_1 + (\alpha t)y, x_2,\dots,x_n\| - \|x_1, x_2,\dots,x_n\|}{\alpha t}\\
&= \alpha\varphi'_{1-}(x_1,\dots,x_n)(y).
\end{aligned}
$$

v) Од

$$
\begin{aligned}
2\|x_1,\dots,x_n\| &= \|2x_1 + ty - ty, x_2,\dots,x_n\|\\
&\le \|x_1 + ty, x_2,\dots,x_n\| + \|x_1 - ty, x_2,\dots,x_n\|
\end{aligned}
$$

следува

$$-\|x_1 - ty, x_2, \dots, x_n\| + \|x_1, \dots, x_n\| \leq \|x_1 + ty, x_2, \dots, x_n\| + \|x_1, x_2, \dots, x_n\|$$

и кога $t \to 0^+$ добиваме

$$\varphi'_{1^-}(x_1, \dots, x_n)(y) \leq \varphi'_{1^+}(x_1, \dots, x_n)(y). \qquad \square$$

Непосредно од последиците 2 и 3 и теорема 1 следува точноста на следната теорема.

Теорема 2. Ако *Gateaux* извод на n-нормата по x_1 во точката $(x_1, \dots, x_n)$ по правец y постои, тогаш точни се следните тврдења

i) $\varphi'_1(x_1, \dots, x_n)(y + y') = \varphi'_1(x_1, \dots, x_n)(y) + \varphi'_1(x_1, \dots, x_n)(y')$;

ii) $\varphi'_1(x_1, \dots, x_n)(\alpha y) = \alpha \varphi'_1(x_1, \dots, x_n)(y)$, за секој реален број α;

iii) $\varphi'_1(\alpha x_1, \dots, x_n)(y) = \operatorname{sign}(\alpha) \varphi'_1(x_1, \dots, x_n)(y)$, за секој реален број $\alpha \neq 0$;

iv) $|\varphi'_1(x_1, \dots, x_n)(y)| \leq \|y, x_2, \dots, x_n)\|$; и

v) $\varphi'_1(x_1, \dots, x_n)(\alpha x_1) = \alpha \|x_1, \dots, x_n\|$. $\square$

Забелешка 2. Како и во претходните разгледувања може да се разгледуваат *Gateaux* изводи на n-нормата по $x_2, \dots, x_n$ во точката $(x_1, \dots, x_n)$ по правец y и да се докажат својства кои се аналогни на веќе докажаните.

2. Фактор просторот $L/P(x_1, \dots, x_{n-1})$ и *Gateaux* изводи

Нека $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subset L$ е линеарно независно множество и со $P(x_1, \dots, x_{n-1})$ го означуваме подпросторот генериран од множеството $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, а со L_P фактор просторот $L/P(x_1, \dots, x_{n-1})$. Со x_P ја означуваме класата на еквиваленција на x во однос на $P(x_1, \dots, x_{n-1})$. L_p е векторски простор со операции $\alpha x_P = (\alpha x)_P$ и $x_P + y_P = (x + y)_P$. Ќе го разгледаме нормираниот простор $(L_P, \|\cdot\|_P)$, во кој нормата е дефинирана со $\|x_P\|_P = \|x, x_1, \dots, x_{n-1}\|$.

Теорема 3. Нека $(L, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ е n-нормиран векторски простор и $L_P, \|\cdot\|_P)$ е фактор просторот генериран од произволно линеарно независно множество $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subset L$. Тогаш n-нормата е *Gateaux* диференцијабилна по x во точката $(x, x_1, \dots, x_{n-1})$ во правец y ако и само ако нормата $\|\cdot\|_p$ е *Gateaux* диференцијабилна во x_p во правец y_p.

Доказ. n-нормата е *Gateaux* диференцијабилна по x во точката $(x, x_1, \ldots, x_{n-1})$ во правец y ако и само ако

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+ty, x_1, \ldots, x_{n-1}\| - \|x, x_1, \ldots, x_{n-1}\|}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0^-} \frac{\|x+ty, x_1, \ldots, x_{n-1}\| - \|x, x_1, \ldots, x_{n-1}\|}{t}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\|(x+ty)_P\|_P - \|x_P\|_P}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\|(x+ty)_P\|_P - \|x_P\|_P}{t}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\|x_P+ty_P\|_P - \|x_P\|_P}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\|x_P+ty_P\|_P - \|x_P\|_P}{t}$$

односно ако и само ако нормата $\|\cdot\|_p$ е *Gateaux* диференцијабилна во x_p во правец y_p. □

Литература

[1] Малчески, Р.: *Забелешки за n-нормирани простори,* Мат. бил. 20 (1996).

[2] Misiak, A.: *n-Inner Product Spaces,* Math.Nachr. 140 (1989).

[3] Rudin, W: *Functional Analysis,* 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, (1991).

GATEAUX DERIVATIVES FOR n-NORM

Risto Malčeski

Summary

In this paper is introduced the conception for partial derivative for n-norm in direction (*Gateaux* derivative) and are proved several property for this derivative. It's observed factor-space $L/P(x_1, \dots, x_{n-1})$ and there are proved several property for him.

University "St. Kiril and Metodij"
Institute of Mathematics
P.O. Box 162
1000 Skopje
Republic of Macedonia

e-mail: ristomal@iunona.pmf.ukim.edu.mk