Математички Билтен
19 (XLV)
1995 (75–84)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ЕКСПЛИЦИТНО РЕШЕНИЕ НА РАВЕНКА ОД ЉАПУНОВ ТИП ЗА ЕДНА КЛАСА СИМЕТРИЧНИ МАТРИЦИ

Д. Л. Карчицка

Апстракт

Матриците од типот $aI^{(n)} + bE^{(n)}$, каде што $I^{(n)}$ е единичната матрица, $E^{(n)}$ е матрицата со елементи сите еднакви 1, a и b се произволно дадени реални броеви, претставуваат предмет на наше интересирање од повеќе аспекти ([1]–[6]). Во оваа прилика вниманието го задржуваме на матричната равенка од Љапунов тип $A_1X + XA_2 = B$ во случајот кога $A_i = a_iI^{(n)} + E^{(n)}$, $i = 1, 2$, за произволно дадени a_i и за симетрична матрица B, посебно која комутира со $E^{(n)}$. Најден е критериум за решливост на равенката во класата на симетричните матрици и за решливата равенка нејдено е решение во експлицитен облик.

Од практични причини единичната $n \times n$–матрица се означува со $I^{(n)}$, а $n \times n$–матрицата со елементи сите еднакви 1 и се означува со $E^{(n)}$. За произволно дадени реални броеви a_i, $i = 1, 2$, нека

$$A_i = a_iI^{(n)} + E^{(n)}, \qquad i = 1, 2 \tag{1}$$

и нека B е дадена симетрична матрица, којашто засега комутира со $E^{(n)}$, т.е.

$$B = B^{\mathrm{T}} \qquad \text{и} \qquad B\,E^{(n)} = E^{(n)}\,B\,. \tag{2}$$

Класата од матриците B со својствата (2) не е тривијална. Нејзини елементи се, на пример, $n \times n$ симетричните матрици $B = [b_{ij}]$ со произволно зададени елементи

$$b_{1n}, b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \qquad j = i, \ldots, n-1$$

и елементи b_{in}, $i = 2, \ldots, n$, определени со условот

$$b_{nn} = \sum_{j=1}^{n} b_{1j} - \sum_{l=1}^{n-1} b_{ln},$$

$$b_{in} = \sum_{j=1}^{n} b_{1j} - \sum_{l=1}^{i-1} b_{li} - \sum_{j=i}^{n-1} b_{ij}, \quad i = 2, \ldots, n-1.$$

Во секој случај, за B со својствата (2) точни се равенствата

$$B\,E^{(n)} = \beta\,E^{(n)} = E^{(n)}\,B$$

со

$$\beta = \left(e^{(n)}\right)^{\mathrm{T}} b_j \left(= b_j^{\mathrm{T}} e^{(n)}\right), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

каде што $e^{(n)}$ е n–векторот со компоненти сите еднакви на 1; b_j е j–та колона на матрицата B, $j = 1, \ldots, n$.

Прво да го разгледаме случајот на матричната равенка на Љапунов

$$A_1\,X + X\,A_2 = B \tag{4}$$

кога непознататата матрица X се бара во класата на матриците B, т.е. при претпоставките:

$$X = X^{\mathrm{T}},\ \ X\,E^{(n)} = E^{(n)}X = x\,E^{(n)},\ \ x = \left(e^{(n)}\right)^{\mathrm{T}} x_j,\ \ j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

каде што x_j ја означува j–та колона на матрицата X.

Согласно со (1) и (5), равенката (4) го добива еквивалентниот облик

$$\left(a\,I^{(n)} + 2E^{(n)}\right) X = B, \quad \text{каде што} \quad a = a_1 + a_2\,. \tag{6}$$

Матрицата на системот (6) е несингуларна ако и само ако $a(a+2n) \neq 0$ ([1]) и тогаш е позната инверзната матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{a}\left(I^{(n)} - \frac{2}{a+2n}\,E^{(n)}\right)$$

на матрицата

$$A = a\,I^{(n)} + 2E^{(n)}\,.$$

Значи, за несингуларна матрица A директно се добива решението на (6)

$$X^* = \frac{1}{2}\left(B - \frac{2\beta}{a+2n}\,E^{(n)}\right)$$

кое согласно со (2), ја задоволува (4) и претставува единствено решение.

Илустрација 1. За избрани $n = 6$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, за кои е точно дека $a = a_1 + a_2 = 9 \neq 0$, $a + 2n = 21 \neq 0$, 6×6–матрицата

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 8 & 9 & 10 & -15 \\ 3 & 8 & 11 & 12 & 13 & -26 \\ 4 & 9 & 12 & 14 & 15 & -33 \\ 5 & 10 & 13 & 15 & 16 & -38 \\ 6 & -15 & -26 & -33 & -38 & 127 \end{bmatrix},$$

за која е точно $BE^{(6)} = E^{(6)}B = 21E^{(6)}$, матрицата

$$X^* = \frac{1}{9}\left(B - \frac{42}{21}E^{(6)}\right)$$

претставува единствено решение на равенката

$$\left(3I^{(6)} + E^{(6)}\right)X + X\left(6I^{(6)} + E^{(6)}\right) = B.$$

За сингуларна матрица A, т.е. при $a(a+2n) = 0$ заслужува внимание нетривијалниот случај

$$a + 2n = 0 \qquad (n \geq 1). \tag{7}$$

(Во тривијалниот случај $a = 0$, при направените претпоставки, (6) се сведува на $x\,E^{(n)} = \frac{1}{2}B$, којашто има решение $X = \alpha I^{(n)}$ само за $B = 2\alpha E^{(n)}$, $\alpha \in R$.)

При претпоставката (7) равенката (6) се сведува на еквивалентна равенка

$$\left(nI^{(n)} - E^{(n)}\right)X = -\frac{1}{2}B \tag{8}$$

чијашто матрица $A = nI^{(n)} - E^{(n)}$ има ранг $r(A) = n - 1$. За β одредено со (3) лесно се утврдува дека равенството

$$\beta = 0 \tag{9}$$

е потребен и доволен услов за непротивречна равенка (8). Имено, за секое решение $\overline{X}$ на (8) е точно дека

$$0 = (n-n)E^{(n)}\overline{X} = E^{(n)}\left(nI^{(n)} - E^{(n)}\right)\overline{X} = E^{(n)}\left(-\frac{1}{2}B\right) = -\frac{\beta}{2}E^{(n)}$$

што значи $\beta = 0$. Дека (9) претставува и доволен услов за непротивречна равенка (8) лесно може да се утврди, ако се воочи дека (9) за матрицата B, значи

$$b_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} b_{in'}$$

и ако матрицата на (8) се разбие на блокови на следниов начин:

$$nI^{(n)} - E^{(n)} = \begin{bmatrix} nI^{(n-1)} - E^{(n-1)} & -e^{(n-1)} \\ -e\left(^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} & n-1 \end{bmatrix}.$$

По соодветно разбивање на блокови на

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & x_{12} \\ x_{12}^{\mathrm{T}} & x_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & b_{12} \\ b_{12}^{\mathrm{T}} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

(8) ја добива блок формата

$$\begin{aligned} \left(nI^{(n-1)} - E^{(n-1)}\right) X_{11} - e^{(n-1)} x_{12}^{\mathrm{T}} &= -\frac{1}{2} B_{11} \\ -\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} X_{11} + (n-1) x_{12}^{\mathrm{T}} &= -\frac{1}{2} b_{12}^{\mathrm{T}} \\ \left(nI^{(n-1)} - E^{(n-1)}\right) x_{12} - x_{nn} e^{(n-1)} &= -\frac{1}{2} b_{12} \\ -\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} x_{12} + (n-1) x_{nn} &= -\frac{b_{nn}}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

Притоа, согласно (9),

$$b_{nn} = -\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} b_{12}, \qquad b_{12} = -B_{11} e^{(n-1)},$$
$$E^{(n-1)} b_{12} = -b_{nn} e^{(n-1)},$$

$$E^{(n-1)} B_{11} = -e^{(n-1)} b_{12}^{\mathrm{T}}, \quad B_{11} E^{(n-1)} = -b_{12} \left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Сега, може да се искористи несингуларноста на блокот $nI^{(n-1)} - E^{(n-1)}$ и познавањето на

$$\left(nI^{(n-1)} - E^{(n-1)}\right)^{-1} = \frac{1}{n} \left(I^{(n-1)} + E^{(n-1)}\right)$$

за да се добие од (10) множеството решенија на (8) во вид на 1–димензионалното линеарно многуобразие

$$L = \{X = \overline{X} + x\, E^{(n)} \mid x \in R\}$$

каде што

$$\overline{X} = -\frac{1}{2n} \begin{bmatrix} B_{11} - b_{nn} E^{(n-1)} & b_{12} - b_{nn} e^{(n-1)} \\ b_{12}^{\mathrm{T}} - b_{nn} \left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Илустрација **2**. За $n = 3$, $a_1 = -2$, $a_2 = -4$ така што $a + 2n = -6 + 2 \cdot 3 = 0$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ -3 & -5 & 8 \end{bmatrix} \neq 0$, и за која $E^{(3)} B = B E^{(3)} = 0$, со наоѓањето на

$$B_{11} - b_{33} E^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ -6 & -5 \end{bmatrix},$$

$$b_{12} - b_{33} e^{(2)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -13 \end{bmatrix}$$

најдено е едно решение

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 7/6 & 1 & 11/6 \\ 1 & 5/6 & 13/6 \\ 11/6 & 13/6 & 0 \end{bmatrix}$$

а со тоа и множеството од решенија $\{X = \overline{X} + x\,E^{(3)} \mid x \in R\}$ на равенката

$$\left(-2\,I^{(3)} + E^{(3)}\right) X + X\left(-4\,I^{(3)} + E^{(3)}\right) = B\,.$$

Разгледувањето на равенката (4) со A_1 и A_2 зададени со (1) и задржување само на условот за симетрија на матриците X и B доведува до низа конкретни заклучоци, кои се однесуваат на матрицата, а со тоа и на решението, на обичниот систем линеарни равенки

$$A(a;\, n)x(n) = b(n)$$

што се добива од (4) кога X и B ќе се запишат и третираат како $n(n+1)/2$–димензионални вектори,

$$\big(x(n)\big)^{\mathrm{T}} = \left[x_{11}\, x_{12}\, \ldots\, x_{1n}\, x_{22}\, \ldots\, x_{2n}\, \ldots\, x_{n-1,\,n-1} x_{n-1,\,n} x_{nn}\right]$$

$$\big(b(n)\big)^{\mathrm{T}} = \left[b_{11}\, b_{12}\, \ldots\, b_{1n}\, b_{22}\, \ldots\, b_{2n}\, \ldots\, b_{n-1,\,n-1} b_{n-1,\,n} b_{nn}\right].$$

Тогаш за $n = 2, 3, 4$ се добиваат, соодветно, матриците $3\times 3 - A(a;\, 2)$, $6\times 6 - A(a;\, 3)$ и $10\times 10 - A(a;\, 4)$:

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{c|cc|ccc} a & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & a \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc|cccccc} a & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & a & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & a \end{array}\right]$$

каде што $a = a_1 + a_2 + 2$.

Анализата на структурата на погорните матрици во општ случај, по воведувањето на ознаките

$$A(a;\,1) = [a], \quad b(1) = [2]. \quad C(1) = [1],$$

доведува до следниве рекурентни врски:

$$A(a;n) = \begin{bmatrix} a & 2\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} & \left(o^{(n(n-1)/2)}\right)^{\mathrm{T}} \\ e^{(n-1)} & (a-1)I^{(n-1)} + E^{(n-1)} & C(n-1) \\ o^{(n(n-1)/2)} & B(n-1) & A(a;\,n-1) \end{bmatrix},$$

$$B(n) = \begin{bmatrix} 2 & \left(o^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} \\ e^{(n-1)} & I^{(n-1)} \\ o^{(n(n-1)/2)} & B(n-1) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$C(n) = \begin{bmatrix} 1 & \left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} & \left(o^{(n(n-1)/2)}\right) \\ o^{(n-1)} & I^{(n-1)} & C(n-1) \end{bmatrix}$$

за $n = 2, 3, \ldots,$; $o^{(s)}$ означува нулти вектор со s компоненти.

Со индукција се утврдува точноста на следниве релации:

$$\begin{aligned}
B(n)e^{(n)} &= 2\,e^{(n(n+1)/2)}; \\
\left(e^{(n(n+1)/2)}\right)^{\mathrm{T}} B(n) &= (n+1)\left(e^{(n)}\right)^{\mathrm{T}}; \\
C(n)e^{(n(n+1)/2)} &= n\,e^{(n)}; \\
\left(e^{(n)}\right)^{\mathrm{T}} C(n) &= \left[1\ 2\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}\ \left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} C(n-1)\right]; \\
B(n)\,C(n) &= A(2;\,n)); \\
C(n)\,B(n) &= nI^{(n)} + E^{(n)}; \\
A(a;\,n)e^{(n(n+1)/2)} &= (a+2n-2)e^{(n(n+1)/2)}; \\
\left(e^{(n(n+1)/2)}\right)^{\mathrm{T}} A(a;\,n) &= \Big[(a+n-1)\ \ (a+2n)\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}\ \ \left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} C(n-1) + \\
&\qquad + \left(e^{n(n-1)/2)}\right)^{\mathrm{T}} A(a;\,n-1)\Big]; \\
C(n)\,A(a;\,n)\,B(n) &= n(a+n-2)I^{(n)} + (a+3n-2)E^{(n)}.
\end{aligned}$$

Очигледно, $A(a;\,1)$ е несингуларна ако и само ако $a \neq 0$ и тогаш $A^{-1}(a;\,1) = [1/a]$; $A(a;\,2)$ е несингуларна за $a \neq 0,\ \pm 2$ и тогаш

$$A^{-1}(a;2)=\frac{1}{a(a^2-4)}\begin{bmatrix} a^2-2 & -2a & 2 \\ -a & a & -a \\ 2 & -2a & a^2-2 \end{bmatrix}.$$

Во општ случај, по утврдувањето дека за несингуларната матрица $A(a;\,n-1)$ е точно равенството

$$C(n-1)A^{-1}(a;\,n-1)\,B(n-1)=$$
$$=\frac{n-1}{a+n-3}\,I^{(n-1)}+\frac{a-2}{(a+n-3)(a+2n-4)}\,E^{(n-1)}$$

може да се добие инверзната на несингуларната матрица $A(a;\,n)$, ако се разбие на блокови на ист начин како $A(a;\,n)$ во (11),

$$A^{-1}(a;\,n)=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \vec{\alpha}_{12} & \vec{\alpha}_{13} \\ \vec{\alpha}_{21} & \vec{\alpha}_{22} & \vec{\alpha}_{23} \\ \vec{\alpha}_{31} & \vec{\alpha}_{32} & \vec{\alpha}_{33} \end{bmatrix}$$

и се искористи дефиницијата на инверзната матрица. Така се доаѓа до следниве системи матрични равенки:

$$\begin{aligned}
a\alpha_{11}+2\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}\alpha_{21} &= 1\\
e^{(n-1)}\alpha_{11}+\left[(a-1)I^{(n-1)}+E^{(n-1)}\right]\alpha_{21}+C(n-1)\alpha_{31} &= o^{(n-1)}\\
B(n-1)\alpha_{21}+A(a;\,n-1)\alpha_{31} &= o^{(n(n-1)/2)}\\
a\alpha_{12}+2\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}\alpha_{22} &= \left(o^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}\\
e^{(n-1)}\alpha_{12}+\left[(a-1)I^{(n-1)}+E^{(n-1)}\right]\alpha_{22}+C(n-1)\alpha_{32} &= I^{(n-1)}\\
B(n-1)\alpha_{22}+A(a;\,n-1)\alpha_{32} &= O_{(n(n-1)/2)\times(n-1)}\\
a\alpha_{13}+2\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}\alpha_{23} &= \left(o^{n(n-1)/2)}\right)^{\mathrm{T}}\\
e^{(n-1)}\alpha_{13}+\left[(a-1)I^{(n-1)}+E^{(n-1)}\right]\alpha_{23}+C(n-1)\alpha_{33} &= O_{(n-1)\times(n(n-1)/2)}\\
B(n-1)\alpha_{23}+A(a;\,n-1)\alpha_{33} &= I^{(n(n-1)/2)}
\end{aligned}$$

($O_{s\times t}$ означува нулта $s\times$т–матрица).

При позната $A^{-1}(a;\,n-1)$ и најдена

$$\left(a\,I^{(n-1)}+\frac{a+2n-6}{a+2n-4}\,E^{(n-1)}\right)^{-1}=\frac{1}{a}\left(I^{(n-1)}-\frac{a+2n-6}{(a+n-3)(a+2n-2)}\,E^{(n-1)}\right)$$

наоѓањето на блоковите на $A^{-1}(a;\, n)$ се сведува на извршување пресметувања по следниве формули:

$$\alpha = (a+n-5)(a+2n) - a + 10;$$
$$\beta = (a-2)(a+n-2)(a+2n-2)\,;$$
$$\gamma = a+2n-4$$

$$\alpha_{11} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \alpha_{12} = -\frac{2\gamma}{\beta}\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}};$$
$$\alpha_{21} = -\frac{\gamma}{\beta}\, e^{(n-1)}; \qquad \alpha_{31} = \frac{2}{\beta}\, e^{(n(n-1)/2)};$$
$$\alpha_{22} = \frac{1}{\beta}\left[(a+n-3)(a+2n-2)I^{(n-1)} - (a+2n-6)E^{(n-1)}\right];$$
$$\alpha_{32} = -A^{-1}(a;\, n-1)\, B(n-1)\alpha_{22};$$
$$\alpha_{23} = -\alpha_{22}C(n-1)A^{-1}(a;\, n-1);$$
$$\alpha_{13} = -\frac{2}{a}\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}\alpha_{23};$$
$$\alpha_{33} = A^{-1}(a;\, n-1)\left(I^{(n(n-1)/2)} - B(n-1)\alpha_{23}\right).$$

Матрицата $A(a;\, n)$ е сингуларна за $a = 2,\ 2-n,\ 2(1-n)$. Од разбирливи причини се задржуваме на случајот $a = 2$, т.е. на

$$A(2;\, n) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} & \left(o^{n(n-1)/2}\right)^{\mathrm{T}} \\ e^{(n-1)} & I^{(n-1)} + E^{(n-1)} & C(n-1) \\ \hline o^{(n(n-1)/2)} & B(n-1) & A(2;\, n-1) \end{array}\right] \tag{12}$$

Користејќи ја несингуларноста на блокот во горниот лев агол и едноставноста на инверзната матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & 2\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} \\ e^{(n-1)} & I^{(n-1)} + E^{(n-1)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} n/2 & -\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} \\ -\frac{1}{2}\, e^{(n-1)} & I^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

лесно се утврдуваат заклучоците:

(i) $r\big(A(2;n)\big) = n$;

(ii) За $A(2;\, n)$ разбиена на блокови како во (12) и соодветните поделби

$$\big(x(n)\big)^{\mathrm{T}} = \left[x_{11} \quad \left(x^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} \quad \big(x(n-1)\big)^{\mathrm{T}}\right];$$
$$\big(b(n)\big)^{\mathrm{T}} = \left[b_{11} \quad \left(b^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} \quad \big(b(n-1)\big)^{\mathrm{T}}\right];$$

равенството

$$b(n-1) - B(n-1)b^{(n-1)} + b_{11}e^{(n(n-1)n/2)} = o^{(n(n-1)/2)}$$

е потребен и доволен услов за непротивречен систем

$$A(2;\, n)x(n) = b(n); \tag{13}$$

(iii) Непротивречниот систем (13) има множество решенија еднакво на $\left(n(n-1)/2\right)$–димензионалното линеарно многуобразие

$$L = \left\{x(n) = \overline{x}(n) + Px(n-1) \mid x(n-1) \in R^{(n(n-1)/2)}\right\},$$

$$\overline{x}(n) = \begin{bmatrix} \frac{n}{2}\, b_{11} - \left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} b^{(n-1)} \\ -\frac{1}{2}\, b_{11}e^{(n-1)} + b^{(n-1)} \\ o^{(n(n-1)/2)} \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} \left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} C(n-1) \\ -C(n-1) \\ I^{(n(n-1)/2)} \end{bmatrix}.$$

Литература

[1] Карчицка, Д.Л.: *За матриците $aP + bE$*, Год. збор., Матем. фак., Скопје, **31**, 1981

[2] Karčicka, D. L.: *Selfconditionally Positive Semidefinite Matrices*, God. zbor. Matem. fak., Skopje, **33–34**, 1982–1983

[3] Карчицка, Д. Л: *За една класа линеарни системи*, Матем. Билтен, Скопје, **9–10**, 1985–1986

[4] Карчицка, Д. Л: *Парето минимум на класа линеарни функции и точкеста дефиниција на соодветни конвексни многустрани множества*, Zbornik Radova SYM–OP–IS '87, Xerceg Novi, 365–371, 1987

[5] Karčicka, D. L: *On the dual pair of LP–problems in canonical form with nonnegative inverse matrix*, Matem. Bilten, Skopje **14**, 1990

[6] Карчицка, Д. Л: *За ЛП–задачата со монотона матрица на ограничувањата*, Матем. Билтен, Скопје, **15**, 1991

[7] Ланкастер, П.: *Теория матриц*, Москва, "Наука", 1982

[8] Plak, V.: *An Equation of Lyapunov Type; Linear Algebra and Its Applications* ELSEVIER, Vol. **39**, 1981

[9] Young, N. J.: *Formulae for the Solution of Lyapunov matrix equations*, Int. J., Control, **31**, 159–179, 1980

EXPLICIT SOLUTION OF LYAPUNOV TYPE EQUATION FOR A CLASS OF SYMMETRIC MATRICES

D. L. Karčicka

Summary

For $A_i = a_i I^{(n)} + E^{(n)}$, $i = 1, 2$, where a_i are given reals, $I^{(n)}$ is the identity $n \times n$–matrix, $E^{(n)}$ is the $n \times n$–matrix with elements all equal 1, and given symmetric matrix B which has the property $BE^{(n)} = E^{(n)}B$, we find the explicit solution of the Lyapunov equation $A_1X + XA_2 = B$ from the class of symmetric matrices X, which satisfy the condition $XE^{(n)} = E^{(n)}X$. Also, we consider the case of any symmetric matrices X and B, and we make conclusions for the equivalent system of $n(n+1)/2$ equations, $A(a;\, n)\, x(n) = b(n)$, where

$$\big(x(n)\big)^{\mathrm{T}} = \big[x_{11}x_{12} \ldots x_{1n}x_{22} \ldots x_{2n}x_{33} \ldots x_{n-1,\,n-1}\, x_{n-1,\,n}\, x_{nn}\big]$$

$$\big(b(n)\big)^{\mathrm{T}} = \big[b_{11}b_{12} \ldots b_{1n}b_{22} \ldots b_{2n}b_{33} \ldots b_{n-1,\,n-1}\, b_{n-1,\,n}\, b_{nn}\big]$$

and $A(a;\, n)$ has the structure

$$\begin{bmatrix} a & 2\left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} & \left(o^{(n(n-1)/2)}\right)^{\mathrm{T}} \\ e^{(n-1)} & (a-1)I^{(n-1)} + E^{(n-1)} & C(n-1) \\ o^{(n(n-1)/2)} & B(n-1) & A(a;\, n-1) \end{bmatrix};$$

$$B(n) = \begin{bmatrix} 2 & \left(o^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} \\ e^{(n-1)} & I^{(n-1)} \\ o^{(n(n-1)/2)} & B(n-1) \end{bmatrix},$$

$$C(n) = \begin{bmatrix} 1 & \left(e^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}} & \left(o^{(n(n-1)/2)}\right)^{\mathrm{T}} \\ o^{(n-1)} & I^{(n-1)} & C(n-1) \end{bmatrix},$$

$B(1) = [2]$, $C(1) = [1]$, , $A(a;\, 1) = [a]$; $o^{(k)}$ denotes the k–vektor with components all equal 0; $e^{(k)}$ denotes the k–vector with components all equal 1.

Prirodno-matematichki fakultet
p.f. 162,
91000 Skopje,
Makedonija