ЗА НЕКОИ ОСОБИНИ НА ЕДЕН СИСТЕМ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

В. Т. Јанекоски

Покажуваме дека системот равенки (1) секогаш има едно решение $(x_1, y_1) = (-1, -1)$ и дека второто, до колку го има — со особината $(\mathcal{R})$: коефициентите a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2)$ од (1) се рационални — се состои од рационални броеви, x_2, y_2. Уште повеќе, со соодветни дополнителни услови, може да се покаже дека двете хиперболи дадени со равенките (1) за пресечните точки ги имаат или точката (x_1, y_1) или точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2) со координати рационални броеви.

Се задржуваме само на првиот резултат, бидејќи вториот е само непосредна последица на првиот. Пото но, сега важат следниве ставови

Став 1. Сите решениа на системот од две независни равенки

$$\left\{\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 xy + a_1 + b_1 - c_1 = 0,\\ a_2 x + b_2 y + c_2 xy + a_2 + b_2 - c_2 = 0, \end{aligned}\right. \qquad (c_1 \cdot c_2 \neq 0). \tag{1}$$

квадратни по непознатите x, y се дадени или со

$$(x_1, y_1) = (-1, -1), \tag{2}$$

или со (2) и

$$(x_2, y_2) = (\Delta/\Delta_1 - 1, \ \Delta/\Delta_2 - 1). \tag{3}$$

Притоа, коефициентите a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2)$ се реални броеви и, за случај (3)

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} c_1 - b_1 & c_1 - a_1 \\ c_2 - b_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \\ &= -\left\{ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

при услов

$$\Delta \neq 0 \tag{5}$$

и

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

при услов

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 \neq 0. \tag{7}$$

Притоа, други можности, освен наведените, за решенијата (x, y) на системот равенки (1) нема.

Доказ. Системот равенки (1) секогаш има едно решение (2): $(x_1, y_1) = (-1, -1)$, коешто веднаш се проверува.

За да ги одредиме другите решенија на (1), воведуваме нови непознати u. v со помош на смената

$$x = \frac{1}{u} - 1, \quad y = \frac{1}{v} - 1 \qquad (u \cdot v \neq 0). \tag{8}$$

Со смената (8), системот равенки (1), за $(x+1)\cdot(y+1) \neq 0$, преоѓа во систем равенки

$$\begin{cases} (c_1 - b_1)\, u + (c_1 - a_1)\, v = c_1, \\ (c_2 - b_2)\, u + (c_2 - a_2)\, v = c_2, \end{cases} \qquad (c_1 \cdot c_2 \neq 0), \tag{9}$$

линеарен по новите непознати u, v. Притоа, со оглед на (4), (5), (6) и (7), единственото решение $(u_0 \neq 0,\ v_0 \neq 0)$ на изведениот систем равенки (9) е дадено со

$$(u_0,\ v_0) = (\Delta_1/\Delta,\ \Delta_2/\Delta), \tag{10}$$

Земајќи ја предвид смената (8), од последниот резултат (10) се добива и второто решение $(x_2,\ y_2)$ на системот равенки (1) коешто е дадено со (3). При тоа, други решенија, освен решението (x_1, y_1) дадено со (2) или решенијата (2) и (3), системот квадратни равенки (1) нема.

Навистина, системот равенки (1) секогаш има решение $(x_1,\ y_1) = (-1, -1)$ и, при условите (5) и (7), има и решение $(x_2,\ y_2)$ кое што е дадено со (3). За овој случај ставот е докажан. Да претпоставиме дека, сега, покрај решението (x_1, y_1) системот равенки (1) има и повеќе други различни решенија $(x.\ y)$. Тогаш, според смената (8), соодветни двојки (u, v) ќе бидат решенија на изведениот систем равенки (9). Тоа значи, како што е добро познато, дека тогаш важат равенствата

$$\Delta = 0,\ \Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = 0. \tag{11}$$

Ако, сега, со оглед на (4) и (6), уочиме дека равенствата (11) се еквивалентни со равенствата

$$\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

тогаш, според (6), заклучуваме дека во наведениот ред, коефициентите a_1, b_1, c_1 се пропорционални со коефициентите a_2, b_2, c_2 $(c_1 \cdot c_2 \neq 0)$. Оваа особина на коефициентите a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2)$, има за последица зависност на равенките од дадениот систем равенки (1), што е спротивно со условите на предложениот став. Тоа значи дека направената претпоставката не е верна, т.е. дека освен двојката $(x_1, y_1) = (-1, -1)$, системот равенки (1) не може истовремено да има повеќе други двојки (x, y) коишто се решенија на тој систем.

Според тоа, системот равенки (1) или има решение $(x_1, y_1) = (-1_1 -1)$, или, заедно со решението (x_1, y_1), има и второ решение кое што е точно решението (x_2, y_2) од (3). Со тоа доказот е комплетиран.

Примери: 1° Системот равенки

$$x + y - 5xy + 7 = 0, \quad x - 2y + 4xy - 5 = 0$$

има решенија $(-1, -1)$ и $(1, 2)$. Тоа се и пресечните точки на хиперболата дадени со горните равенки, со координати рационални броеви

2° Системот равенки

$$a_1x + b_1y + (a_1 + b_1)\,xy = 0. \quad (a_1 + b_1)\,(a_2 + b_2) \neq 0, \tag{α}$$

$$a_2x + b_2y + (a_2 - b_2)\,xy = 0, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \tag{β}$$

има решења $(-1_1 -1)$ и $(0, 0)$. Тоа се и пресечните точки на хиперболата (α) $(a_1\,b_1 \neq 0)$ и хиперболата (β) $(a_2\,b_2 \neq 0)$ со координати рационални броеви.

Од овој пример се гледа дека особината $(\mathcal{R})$ претставува само доволен услов за решенијата на системот (1) да бидат двојки (x_k, y_k) $(k = 1, 2)$ на рационални броеви x_k. y_k. Имено, коефициентите a_k, b_k $(k = 1.\ 2)$ можат, овде, да бидат реални броеви.

Природата на решенијата (x_k, y_k) $(k = 1, 2)$ на системот квадратни равенки (1) е искажана со следниов

Став 2. Нека коефициентите a_k, b_k, c_k $(k = 1.\ 2)$ на системот равенки (1) уживаат особина

$(\mathcal{R})$ a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2)$ се рационални броеви.

Тогаш, решението (2), односно решењата (2) и (3) на системот (1) се состојат од двојките реални броеви x_k, y_k $(k = 1, 2)$ коишто се рационални броеви.

Доказ. Тој очигледен. Навистина, нека коефициентите a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2)$ ја имаат особината $(\mathcal{R})$. Тогаш изразите: Δ, Δ_1, Δ_2 како и изразите $\Delta/\Delta_1 - 1$, $\Delta/\Delta_2 - 1$, се добиваат со рационални операции изведени над рационалните броеви a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2)$. Според (3)

$$x_2 = \Delta/\Delta_1 - 1, \quad y_2 = \Delta/\Delta_2 - 1,$$

пак решението (x_2, y_2) на системот равенки (1) се состои од двојка рационални броеви x_2, y_2. Од друга страна, бидејќи $x_1 = -1$ и $y_1 = -1$ си рационални броеви, решенијата (x_k, y_k) $(k=1, 2)$ на системот квадратни равенки (1) се состојат од двојки рационални броеви x_k, y_k $(k=1, 2)$, како што и тврдевме.