ЗА НЕКОИ НЕРАВЕНСТВА ИНДУЦИРАНИ ОД ДАДЕНИ ТРИАГОЛНИЦИ

В. Т. Јанекоски

1. Нека е даден триаголник ABC со внатрешните агли A, B, C. Да ставиме $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$. Тогаш

$$(1_1) \qquad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0.$$

и притоа важат равенствата

$$(1_2) \qquad (\vec{b}, \vec{c})=\pi-A,\ (\vec{c}, \vec{a})=\pi-B,\ (\vec{a}, \vec{b})=\pi-C,$$

т.е. аглите $(\vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{c}, \vec{a})$, $(\vec{a}, \vec{b})$ се од отворениот интервал $(0, \pi)$, со збир 2π.

Нека a, b, c се големини на векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и h_a, h_b, h_c големини на векторите висини $\vec{h}_a, \vec{h}_b, \vec{h}_c$. Сега важи

Лема. Со векторите $a^2\vec{h}_a$, $b^2\vec{h}_b$, $c^2\vec{h}_c$ може да се образува триаголник T_h.

Доказ. Важи равенството

$$(2_1) \qquad c^2\vec{h}_c=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}.$$

Навистина, поради (1_1), $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се вектори компланарни со рамнината (Δ) на триаголникот ABC. Поради тоа, векторот $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ е компланарен со (Δ) и истовремено е ортогонален на векторот $\vec{c}$. Понатаму

$$|c^2\vec{h}_c|=|\vec{a}\times\vec{b}|\, c,$$

или

$$(2_2) \qquad ch_c = ab \sin C,$$

што е точно, пак равенството (2_1) важи. Аналогно важи и за векторите $\vec{h}_a, \vec{h}_b$, пак можеме да напишеме

$$(2_3) \qquad a^2 \vec{h}_a = (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}, \quad b^2 \vec{h}_b = (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b}, \quad c^2 \vec{h}_c = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}.$$

Како за произволни вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ важи равенството

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = 0,$$

според (2_3) следува

$$a^2 \vec{h}_a + b^2 \vec{h}_b + c^2 \vec{h}_c = 0,$$

коешто ја докажува лемата.

Став 1. Важи равенството

$$(3) \qquad area\ T_h = 4\,(area\ T)^3$$

каде што *area T* означува плоштина на дадениот триаголник ABC.

Доказ. За триаголникот ABC, со оглед на (1_1), важат равенствата

$$(4) \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}.$$

Со оглед на (4), сега

$$\begin{aligned} 2\ area\ T_h &= |a^2 \vec{h}_a \times b^2 \vec{h}_b| \\ &= |\{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}\} \times \{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}\}| \\ &= \{|\vec{a} \times \vec{b}|a \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|b\} \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}|^3, \end{aligned}$$

коешто го докажува (3).

Став 2. Со векторите

$$\vec{h}_c, \quad \frac{b \cos A}{c} \vec{a}, \qquad \frac{a \cos B}{c} \vec{b}$$

може да се образува триаголник.

Доказ. Важи разложувањето

$$c^2 \vec{h}_c = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

или, поради (1_2)

$$c \vec{h}_c = (b \cos A) \vec{a} - (a \cos B) \vec{b}, \tag{5}$$

што го докажува ставот.

Став 3¹. Со величините

$$\cos A, \quad \cos B, \quad \sin C \tag{6}$$

$$(0 < A,\ B < \pi/2, \quad 0 < C < \pi,\ A + B + C = \pi)$$

може да се образува триаголник.

Доказ. Нека $\vec{a}_0$, $\vec{b}_0$, $\vec{e}$ се единични вектори на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{h}_b$. Тогаш (5) може да се напише во вид

$$c\vec{h}_c = ab(\cos A\, \vec{a}_0 - \cos B\, \vec{b}_0) \tag{7}$$

што, со оглед на (2_2), го докажува ставот.

Став 3². Внатрешните агли X, Y, Z на триаголникот XYZ со големини на страните $x = YZ$, $y = ZX$, $z = XY$ во наведениот ред дадени со (6), се

$$X = \pi/2 - A, \quad Y = \pi/2 - B, \quad Z = \pi - C. \tag{8_1}$$

Доказ. Да воведеме единични вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ со равенствата

$$\vec{e}_1 = -\vec{a}_0, \quad \vec{e}_2 = \vec{b}_0, \quad \vec{e}_3 = \vec{e} \tag{9}$$

Со ознаките (9) и, со оглед на (2_2), равенството (7) може да се напише во вид

$$\cos A\, \vec{e}_1 + \cos B\, \vec{e}_2 + \sin C\, \vec{e}_3 = 0, \tag{10_1}$$

при што

$$(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \pi - X, \quad (\vec{e}_3, \vec{e}_1) = \pi - Y, \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \pi - Z. \tag{10_2}$$

Сега, со оглед на (9) и (4), имаме

$$\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \vec{b}_0 \cdot \frac{(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{c}}{|(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{c}|} = \frac{(\vec{b}_6 \times \vec{c}_0) \cdot (\vec{c}_0 \times \vec{b}_0)}{|\vec{b}_0 \times \vec{c}_0|\ |\vec{c}_0|},$$

или

$$\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = -\sin A.$$

По сличен пат, наоѓаме и

$$\cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = -\sin B.$$

Бидејќи

$$\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (-\vec{a}_0)\cdot\vec{b}_0 = \cos C,$$

и за аглите X, Y, Z на триаголникот XYZ важи (10_2), добиваме равенства

(11) $$\cos X = \sin A, \ \cos Y = \sin B, \ \cos Z = -\cos C.$$

За дадени позитивни величини $x = \cos A$, $y = \cos B$, $z = \sin C$, равенствата (10) одредуваат два триаголника кои се разликуваат по својата ориентација во рамнината (Δ) и коишто ги сметаме за еднакви. Од наведената причина, равенствата (11) имаат единствено решење по аглите X, Y, Z. Тие агли се точно аглите дадени со (8_1).

2. Сега ќе укажеме на само неколку нови неравенства, коишто се последица на веќе познати неравенства за триаголник, а се индуцирани со егзистенцијата на соодветни триаголници. Изнесената постапка овозможува во значителна мера да се наголеми бројот иа досегашните неравенства за триаголник, за кои богат материјал се наоѓа во [1]. Ќе ја илустрираме постапката со неколку примери.

Нека е даден триаголникот $A_0B_0C_0$ со внатрешните агли A, B, C и големини на страните

(6_1) $$a = \sin A, \quad b = \sin B, \quad c = \sin C$$
$$(0 < A, \ B < \pi/2, \quad 0 < C < \pi, \quad A + B + C = \pi),$$

чијашто егзистенција може, по различни патишта, лесно да се установи *). Нека е даден триаголникот XYZ кој според ставот **3**, егзистира и е дефиниран со (6) и (8_1). Ако, сега, равенствата (8_1) се сфатат како еднозначно пресликување [2] од триаголникот $A_0B_0C_0$ со големини на страните (6_1) во триаголникот XYZ со големини на страните

$$x = \cos A, \quad y = \cos B, \ z = \sin C$$
$$(0 < X, \ Y < \pi/2, \quad 0 < Z < \pi, \ X + Y + Z = \pi),$$

---

*) Егзистенција на триаголникот ABC со големини на страните (6_1) $(0 < A, B, C < \pi, \ A + B + C = \pi)$ може да следува од нашите равенства (1) и (4).

тогаш од (8_1) се гледа дека ова пресликување е обратно еднозначно пресликување. Ќе го користиме овој факт заради поголемо удопство во понатамошното излагање. Имено, почетен триаголник ќе ни биде триаголникот XYZ.

Сега можеме да го искажеме следниов

Став 4^1. За произволен триаголник ABC со аглите $0 < A, B < \pi/2$, $0 < C < \pi$, важи неравенството

$$(12_1) \qquad 1 < \sin A + \sin B - \cos C \leqslant 3/2.$$

При тоа, равенството важи ако и само ако

$$A = B = \pi/6, \quad C = 2\pi/3.$$

Доказ. За произволен триаголник XYZ, според [GI]*), **2.16**, важи

$$(12_2) \qquad 1 < \cos X + \cos Y + \cos Z \leqslant 3/2,$$

со равенство ако и само ако $X = Y = Z = \pi/3$.

Сега, со оглед на (8_1)

$$\cos X = \sin A, \quad \cos Y = \sin B, \quad \cos Z = -\cos C$$

и (12_2) преминува во (12_1). Притоа, во согласност со (8_1) равенството важи ако и само ако

$$\pi/2 - A = \pi/2 - B = \pi - C = \pi/3,$$

што го дава наведениот резултат.

Став 4^2. За тапоаголен триаголник ABC со аглите $0 < A, B < \pi/2$, $\pi/2 < C < \pi$, важи неравенство

$$(13_1) \qquad 2 < \cos A + \cos B + \sin C \leqslant 3\sqrt{3}/2.$$

За остроаголен триаголник ABC важи неравенството

$$(13_2) \qquad 0 < \cos A + \cos B + \sin C < 1 + \sqrt{2}.$$

Доказ. Според [GI] (**2.2**, (2)), за остроаголен триаголник XYZ важи неравенството

$$(13_3) \qquad 2 < \sin X + \sin Y + \sin Z \leqslant 3\sqrt{3}/2.$$

Земајќи предвид (8_1)

$$\sin X = \cos A, \quad \sin Y = \cos B, \quad \sin Z = \sin C,$$

и горното неравенство преоѓа во неравенство (13_1).

---

*) Во натамошниот текст [GI] означува [**1**].

За доказ на неравенството (13_2) служи, [*GI*] (**2.2.** (3)), неравенството

$$0 < \sin X + \sin Y + \sin Z < 1 + \sqrt{2},$$

коешто важи за тапоаголен триаголник XYZ.

Нека се дадени триаголникот $A_0B_0C_0$ и триаголниците $X_kY_kZ_k$ $(k = 1, 2, 3)$ со големини на страните

$$(6_2)\qquad \begin{cases} x_1 = \cos A, & y_1 = \cos B, \quad z_1 = \sin C, \\ x_2 = \cos B, & y_2 = \cos C, \quad z_2 = \sin A, \\ x_3 = \cos C, & y_3 = \cos A, \quad z_3 = \sin B, \end{cases}$$

и аглите

$$(8_2)\qquad \begin{cases} X_1 = \pi/2 - A, & Y_1 = \pi/2 - B, \quad Z_1 = \pi - C, \\ X_2 = \pi/2 - B, & Y_2 = \pi/2 - C, \quad Z_2 = \pi - A, \\ X_3 = \pi/2 - C, & Y_3 = \pi/2 - A, \quad Z_3 = \pi - B. \end{cases}$$

Равенствата (6_2) и (8_2) ни овозможуваат да искажеме

Став 4[3]. За периметарот $2s_k = x_k + y_k + z_k$ на *секој* остроаголен триаголник $X_kY_kZ_k$ $(k = 1, 2, 3)$ важи оценката

$$(13_5)\qquad 2 < 2s_k \leqslant 3\sqrt{3}/2 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

додека за *секој* тапоаголен триаголник $X_k\,Y_k\,Z_k$ со тапиот агол Z_k(к $= 1, 2, 3$) важи оценката

$$(13_6)\qquad 0 < 2s_k < 1 + \sqrt{2} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

Доказ. Тој е очигледен, бидејќи истиот, за $k = 1$, е даден со ставот **4**[2] и важат неравенствата (13_1) и (13_2). Доказот за $k = 2, 3$ е сосем аналоген.

Забелешка. Оценките (13_5) и (13_6) очигледно, важат и за периметарот $2s_0$ на триаголникот $A_0B_0C_0$ и тоа од вид (13_6) за случај на тапоаголен триаголник и од вид (13_5) за остроаголен триаголник.

Нека $A_0B_0C_0$ е остроаголен триаголник. Тогаш, според (8_2) *сиите* триаголници $X_kY_kZ_k$ се тапоаголни со тапите агли Z_k $(k = 1, 2, 3)$

Сега имаме

Став 5[1]. За плоштините на триаголниците $A_0B_0C_0$, $X_kY_kZ_k(k=1,2,3)$ важи особината

$$(14_1)\qquad area\ A_0B_0C_0 = \sum_{k=1}^{3} area\ X_kY_kZ_k.$$

Доказ. Најнапред докажуваме следна *лема*: важи равенството

$$(14_2) \qquad \sin A \sin B \sin C = \cos A \cos B \sin C + \cos B \cos C \sin A + \cos C \cos A \sin B,$$

кадешто A, B, C се агли на произволен триаголник ABC.

Навистина, за аглите A, B, C важи

$$(15_1) \qquad \begin{aligned} \sin C \cos C &= \sin (A + B) \cos C \\ &= \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C \end{aligned}$$

и

$$(15_2) \qquad \begin{aligned} \sin C \cos C &= -\sin C \cos (A + B) \\ &= -\sin C \cos A \cos B + \sin C \sin A \sin B. \end{aligned}$$

Десните страни на (15_1) и (15_2) даваат (14_2). Бидејќи

$$\begin{aligned} 2\, area\, A_0B_0C_0 &= \sin A \sin B \sin C, \\ 2\, area\, X_1Y_1Z_1 &= \cos A \cos B \sin Z_1 \\ &= \cos A \cos B \sin C, \end{aligned}$$

и слично за $area\ X_kY_kZ_k\ (k = 2, 3)$, равенството (14_1) се сведува на равенството (14_2) кое важи.

За плоштините на тапоаголните триаголници $X_kY_kZ_k\ (k = 1, 2, 3)$ јасен е, сега, следниов

Став 5^1. Важи оценка

$$(16_1) \qquad 0 < \sum_{k=1}^{3} area\ X_kY_kZ_k \leqslant 3\sqrt{3}/16$$

Доказ. Според [*GI*], **2.8**, за остроаголен триаголник со агли A, B, C важи

$$(16_2) \qquad 0 < \sin A \sin B \sin C \leqslant 3\sqrt{3}/8$$

што, со оглед на (14_1) го докажува ставот.

Една геометриска интерпретација. лесно се покажува дека сите триаголници $A_0B_0C_0$ и $X_kY_kZ_k\ (k = 1, 2, 3)$ имаат еднаков радиус на, околу нив, опишани кругови и дека тој изнесува 1/2. Нека, сега, кругот со единичен дијаметар, со еден дијаметар, го поделиме на два полукруга. Тогаш сите тапоаголни триаголници $X_kY_kZ_k\ (k = 1, 2, 3)$ можат да бидат сместени во едниот полукруг, додека остроаголниот триаголник $A_0B_0C_0$ се наоѓа истовремено во двата полукруга (сиот круг). Сега за плоштините на ваквите триаголници важи равенството (14_1). Притоа, јасен е и тривијалниот случај кога $A_0B_0C_0$ е правоаголен триаголник.

Даваме уште една оценка за односот помеѓу плоштините на триаголникот $A_0B_0C_0$ и триаголникот $X_1Y_1Z_1$. Сега важи

Став 5[3]. За остроаголен (правоаголен) триаголник $A_0B_0C_0$ со остар (прав) агол C и тапоаголен (правоаголен) триаголник $X_1Y_1Z_1$ со тап (прав) агол Z_1 важи неравенството

$$0 \leqslant area\, A_0B_0C_0 - area\, X_1Y_1Z_1 \leqslant 1/4. \tag{16_3}$$

Равенството на десната страна важи ако и само ако $C = \pi/4$ $(Z_1 = 3\pi/4)$.

Равенството на левата страна важи ако и само ако $C = \pi/2$ $(Z_1 = \pi/2)$, т.е. ако и само ако триаголниците $A_0B_0C_0$ и $X_1Y_1Z_1$ се правоаголни триаголници коишто ги сметаме за еднакви.

За тапоаголниот триаголик $A_0B_0C_0$ со тап агол C и остроаголниот триаголник $X_1Y_1Z_1$ важи неравенството

$$-1/4 \leqslant area\, A_0B_0C_0 - area\, X_1Y_1Z_1 < 0, \tag{16_4}$$

со равенство ако и само ако $C = 3\pi/4$ $(Z_1 = \pi/4)$.

Доказ. Со оглед на (6_2) и (8_2), сега важат равенствата

$$2\, area\, A_0B_0C_0 = \sin A \sin B \sin C,$$

$$2\, area\, X_1Y_1Z_1 = \cos A \cos B \sin C,$$

од каде

$$area\, A_0B_0C_0 - area\, X_1Y_1Z_1 = -\frac{1}{2}\sin C \cos(A+B) = \frac{1}{4}\sin 2C. \tag{16_5}$$

Предложениот став, сега, е само непосредна последица на докажаното равенство (16_5). Со тоа доказот би бил комплетиран.

BIBLIOGRAFIJA

[1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić: *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969.

[2] B. T. Јаќекоски: *Егзисшенција и некои особини на шриаголници чиишшо сшрани се шригономешриски функции на аглише од даден шриаголник*, овој *Билшен*, кн. XXI (1970).

SUR QUELQUES INÉGALITÉS IMPLIQUÉS PAR DES TRIANGLES DONNÉS

V. T. Janekoski

(R é s u m é)

À partir des inégalités

$$(12_2),\ (13_3),\ (13_4)$$

et les transformations des angles (8_1), on démontre les inégalités:

$$(12_1),\ (13_1),\ (13_2).$$

Si $A_0B_0C_0$ signifie un triangle avec les côtés donnés par (6_1) $(0 < A,\ B,\ C < \pi/2)$ et $X_kY_kZ_k\ (k = 1, 2, 3)$ signifient les triangles donnés par (6_2) et (8_2), on démontre les inégalités:

$$(16_1),\ (16_3),\ (16_4).$$