ЗА ЕДЕН ПОТРЕБЕН И ДОВОЛЕН УСЛОВ ЗА ЕГЗИСТЕНЦИЈА НА ТРИАГОЛНИК

Виктор Т. Јанекоски

Познати се повеќе критериуми кои што даваат потребни и доволни услови за егзистенцијата на триаголник зададен со своите елементи. Во случај на три позитивни величини x, y, z третирани како страни па еден триаголник, двата соодветни еквивалентни критериуми се дадени во [1] и [2].

На ова место се дава со посочените два, уште еден еквивалентен критериум за егзистенција на триаголник зададен со три позитивни величини земени за страни на тој триаголник. Поконкретно, сега важи

Став 1. Потребен и доволен услов, со три позитивни величини x, y, z, како со страни, да може да се образува триаголник е

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}>1. \tag{1}$$

Доказ. Неравенството (1) еквивалентно е со

$$\frac{(x-y)^2-z^2}{2xy}+\frac{(y-z)^2-x^2}{2yz}+\frac{(z+x)^2-y^2}{2zx}>0.$$

Понатаму, важат еквиваленциите:

$$-\frac{(y+z-x)(z+x-y)}{2xy}-\frac{(z+x-y)(x+y-z)}{2yz}+\frac{(z+x-y)(z+x+y)}{2zx}>0,$$

$$\frac{z+x-y}{2xyz}\cdot\left\{-z(y+z-x)-x(x+y-z)+y(z+x-y)\right\}>0,$$

$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)>0. \tag{2}$$

Неравенството (2) претставува потребен и доволен услов за егзистенција на триаголникот со позитивните величини x, y, z земени за страни на триаголник {cf. [2]}. Бидејќи

$$(1) \Leftrightarrow (2),$$

доказот е завршен.

Познато е [3] дека (2), како доволен услов за егзистенцијата на триаголник за чиишто страни се земени позитивните величини x, y, z, определува точно еден триаголник XYZ со внатрешни агли X, Y, Z и страни $YZ=x$, $ZX=y$, $XY=z$. Во овој случај изразите од (1)

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}, \quad \frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}, \quad \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy} \tag{3}$$

ги одредуваат аглите X, Y, Z на триаголникот XYZ, бидејќи изразите (3) соодветно се еднакви на

$$\cos X, \quad \cos Y, \quad \cos Z.$$

Непосредна последица на горната особина и неравенството (1) е {[GJ]*), **2.16**} познатиот

Став 2. За произволен триаголник XYZ, важи

$$\cos X + \cos Y + \cos Z > 1.$$

Критериумот (1), како доволен услов за егзистенцијата на триаголник со величини $x, y, z > 0$ земени за страни на тој триаголник, некогаш е лесно применлив кога страните x, y, z се погодно избрани функции од некои други величини, на пр. од елементите на еден или повеќе триаголници.

Примери. За даден триаголник ABC со агли A, B, C, за страни x, y, z на триаголникот XYZ може да се земат:

$$x = \sin A,\ y = \sin B,\ z = \sin C \ (0 < A,\ B,\ C < \pi),$$

$$x = \sin 2A,\ y = \sin 2B,\ z = \sin 2C \left(0 < A,\ B,\ C < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x = \cos\frac{A}{2},\ y = \cos\frac{B}{2},\ z = \cos\frac{C}{2} \ (0 < A,\ B,\ C < \pi),$$

што се познати резултати {да се види на пр.: [GJ] **13.6**; [4]}.

Може да се покаже дека егзистира триаголник со страни

$$x = \cos A,\ y = \cos B,\ z = \sin C$$

*) [GJ] понатаму означува [1].

$$(0 < A,\ B < \frac{\pi}{2},\ \ 0 < C < \pi),$$

каде што A, B, C се агли на дадениот триаголник ABC. Подетално за ова се наведува во [5].

BIBLIOGRAFIJA

[1] O. Bottema, R. Ž. Đorđević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, Geometric Inequalities, Groningen 1969, p. 119, **13.4**

[2] Dr Dragoslav S. Mitrinović, Nejednakosti, Beograd 1965, p. 126, st. **2.2.11**

[3] Л. Илиев, Сп. Манолов, Елементарна математика — Тригонометрия, София 1966, р. 161.

[4] Ж. Мадевски, Четирите значајни точки во триаголникот како тежишта на погодно избрани маси, овој *Билшен*, кн. XX (1969), р. 44.

[5] Виктор Т. Јанекоски, Егзистенција и некои особини на триаголници чиишто страни се тригонометриски функции на аглите од даден триаголник, овој *Билшен*, р. 89.