ЕГЗИСТЕНЦИЈА И НЕКОИ ОСОБИНИ НА ТРИАГОЛНИЦИ ЧИИШТО СТРАНИ СЕ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ НА АГЛИТЕ ОД ДАДЕН ТРИАГОЛНИК

Викшор Т. Јанекоски

Покажано е [1] дека

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{2\,yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2\,zx}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2\,xy}>1, \tag{1}$$

претставува потребен и доволен услов за егзистенција и единстеност на триаголникот XYZ за чиишто страни се земени позитивните величини $x=YZ$, $y=ZX$, $z=XY$.

Повикувајќи се на (1), ќе докажеме (т. **1.**) егзистенција на триаголникот XYZ со страни

$$\cos A,\ \cos B,\ \sin C \quad (0<A,\ B<\pi/2,\ 0<C<\pi),$$

како и на (т. **2.**) триаголникот XYZ со страни

$$\sin\frac{A}{2},\ \sin\frac{B}{2},\ \cos\frac{C}{2} \quad (0<A,\ B,\ C<\pi).$$

При тоа A, B, C се внатрешни агли на триаголникот ABC.

Внатрешните агли X, Y, Z на триаголникот XYZ ќе бидат определени со равенствата

$$\cos X=\frac{y^2+z^2-x^2}{2\,yz},\ \cos Y=\frac{z^2+x^2-y^2}{2\,zx},\ \cos Z=\frac{x^2+y^2-z^2}{2\,xy}. \tag{2}$$

Во натамошното излагање се повикуваме на познатите равенства

$$\begin{cases}\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=-2\sin A\sin B\cos C+1,\\ \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=-2\cos A\cos B\cos C+1;\end{cases} \tag{3}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1, \\ \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1, \end{cases}$$

што важат за аглите A, B, C на произволен триаголник ABC и кои што лесно се проверуваат.

1. Сега важи

Став 1. Постои триаголник XYZ со страни

$$(5) \qquad x=\cos A,\ y=\cos B,\ z=\sin C,$$

при што е

$$(6) \qquad 0<A<\pi/2, \quad 0<B<\pi/2, \quad 0<C<\pi.$$

Доказ. Нека триаголникот XYZ егзистира. Тогаш, за првото равенство (2), се добива

$$\cos X=\frac{\cos^2 B+\sin^2 C-\cos^2 A}{2\cos B\sin C},$$

$$=\frac{1-(\cos^2 C+\cos^2 A-\cos^2 B)}{2\cos B\sin C},$$

или, со оглед на (3)

$$(7) \qquad \cos X=\sin A.$$

Аналогно, со помош на (3), се добива и

$$(8) \qquad \cos Y=\sin B,$$

$$(9) \qquad \cos Z=-\cos C.$$

Сега е

$$\cos X+\cos Y+\cos Z=\sin A+\sin B-\cos C,$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{C}{2} + 1,$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right) + 1,$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{\pi-2A}{4}\sin\frac{\pi-2B}{4} + 1.$$

Како е, со оглед на (6)

$$0 < (\pi-2A)/4 < \pi/4, \quad 0 < (\pi-2B)/4 < \pi/4, \quad 0 < C/2 < \pi/2,$$

добиваме

$$\cos X + \cos Y + \cos Z > 1,$$

со што е докажано (1), т.е. навистина егзистира триаголникот XYZ како што и претпоставивме.

Величините

(10) $$X = \pi/2 - A, \quad Y = \pi/2 - B, \quad Z = \pi - C$$

се агли на триаголникот XYZ. Навистина, сега е

$$X + Y + Z = 2\pi - (A + B + C) = \pi,$$

при што, со оглед на (6), е

$$0 < X < \pi/2, \quad 0 < Y < \pi/2, \quad 0 < Z < \pi,$$

и се задоволени равенствата (7), (8) и (9).

Поконкретно, точни се особините изразени со

Став 1[1]. Нека е даден триаголник ABC при што е

(11) $$0 < A < \pi/2, \quad 0 < B < \pi/2, \quad 0 < C \leqslant \pi/2.$$

Тогаш постои триаголник XYZ со страните (5) и аглите (10), каде што е сега

(12) $$0 < X < \pi/2, \quad 0 < Y < \pi/2, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant Z < \pi.$$

Доказот непосредно следува од тој даден во ставот **1,** земајќи предвид (11).

Како една последица на овој став е следната о с о б и н а. При пресликувањето на страните $a = \sin A$, $b = \sin B$, $c = \sin\ C$ ($a = BC$, $b = CA$, $c = AB$) на триаголникот ABC респективно во страни $x = \cos A$, $y = \cos B$, $z = \sin C$ на триаголникот XYZ, тогаш:

Остроаголниот (правоаголниот) триаголник ABC се пресликува во тапоаголен (правоаголен) триаголник XYZ. При тоа остриот (правиот) агол C се пресликува во тап (прав) агол Z.

Став 1^2. За даден триаголник ABC каде што е

$$0 < A < \pi/2, \quad 0 < B < \pi/2, \quad \pi/2 \leqslant C < \pi, \tag{13}$$

постои триаголник XYZ со страни (5) и агли (10) при што е

$$0 < X < \pi/2, \quad 0 < Y < \pi/2, \quad 0 < Z \leqslant \pi/2. \tag{14}$$

Доказот е аналоген на тој од ставот **1^1.**

Сега за последица имаме о с о б и н а:

Тапоаголниот (правоаголниот) триаголник ABC се пресликува во остроаголен (правоаголен) триаголник XYZ. При тоа, тапиот (правиот) агол C се пресликува во остар (прав) агол Z.

Забелешка. Природно е ова пресликување да се посматра како пресликување со агли дефинирани со (10) и (11) односно (13)

2. Сега важи

Став 2. Постои триаголник XYZ со страни

$$x = \sin\frac{A}{2}, \; y = \sin\frac{B}{2}, \; z = \cos\frac{C}{2}, \tag{15}$$

при што е

$$0 < A,\ B,\ C < \pi. \tag{16}$$

Доказ. Нека триаголникот XYZ постои. Тогаш, за првото равенство (2), е

$$\cos X = \frac{\sin^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

или, со оглед на (4)

$$\cos X = \cos \frac{A}{2} \tag{17}$$

По сличен пат, со помош на (4), се добива и

$$\cos Y = \cos \frac{B}{2}, \tag{18}$$

$$\cos Z = -\sin \frac{C}{2}. \tag{19}$$

Аналогно на постапката во т. **1.**, може да се покаже дека важи (1), бидејќи, по нужни трансформации, се добива

$$\cos X + \cos Y + \cos Z = 4 \cos \frac{A+B}{4} \sin \frac{A}{4} \sin \frac{B}{4} + 1,$$

каде што, поради (16), е

$$0 < A/4,\ B/4 < \pi/4, \quad 0 < (A+B)/4 < \pi/2.$$

Да напоменеме дека егзистенцијата на триаголникот XYZ понепосредно се докажува на следниов начин. Важи равенството

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2\,xy} = -\sin \frac{C}{2}$$

коешто го заменува равенството (19). Како, со оглед на (16), важи $0 < \sin(C/2) < 1$, имаме

$$-2\,xy < x^2 + y^2 - z^2 < 0,$$

што е еквивалентно со неравенствата

$$x + y > z, \tag{20}$$

$$x^2 + y^2 < z^2. \tag{21}$$

Неравенствата (20) и (21) се потребни и доволни за егзистенцијата на триаголникот со страните $x,\ y,\ z > 0$. Навистина, од (21) имаме $z > x,\ z > y$, откаде

$$y + z > x,\ z + x > y$$

што, со оглед на (20), и го докажува нашето тврдење.

Величините

$$X = A/2, \quad Y = B/2, \quad Z = \pi/2 + C/2 \tag{22}$$

се агли на триаголникот XYZ. Навистина, сега е:

$$X + Y + Z = \pi/2 + (A + B + C)/2 = \pi,$$

при што, со оглед на (16), е

$$0 < X < \pi/2, \quad 0 < Y < \pi/2, \quad \pi/2 < Z < \pi,$$

и се задоволени равенствата (17), (18) и (19).

Поконкретно, важат особини дадени со

Став 2[1]. Нека е даден триаголник ABC, каде што е

$$0 < A < \pi, \ 0 < B < \pi, \ 0 < C \leqslant \pi/2. \tag{23}$$

Тогаш егзистира триаголник XYZ со страни (15) и агли (22), каде што е

$$0 < X < \pi/2, \ 0 < Y < \pi/2, \ \pi/2 < Z \leqslant 3\pi/4. \tag{24}$$

Став 2[2]. Нека е даден триаголник ABC, каде што е

$$0 < A < \pi, \ 0 < B < \pi, \ \pi/2 \leqslant C < \pi. \tag{25}$$

Тогаш егзистира триаголник XYZ со страни (15) и агли (22), каде што е

$$0 < X < \pi/2, \ 0 < Y < \pi/2, \ 3\pi/4 \leqslant Z < \pi. \tag{26}$$

Земајќи предвид (23) односно (25) доказот на горните два става е очигледен.

Ќе напоменеме дека, сега, без оглед на тоа (во согласност со (23) и (25)) каква е природата на триаголникот ABC, во двата наведени случаи, пресликаниот триаголник XYZ е тапоаголен триаголник со тапиот агол Z.

Природно, и тука пресликувањето на триаголникот ABC со страни $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ во триаголник со страни $\sin(A/2)$, $\sin(B/2)$, $\cos(C/2)$ може да се посматра како пресликување со агли дефинирани со (22) и (23) односно (25).

Завршни забелешки

1° Неравенството $\cos A + \cos B > \sin C$, како едно од трите неравенства опфатено со ставот **1.**, наведено е во [2];

2° Може да се посматра и триаголник XYZ со страни $x = |\cos A|$, $y = \cos B$, $z = \sin C$ каде што A, B, C се агли на триаголникот ABC кои примаат допустливи вредности;

3° Некои други особини на, кон пресликувањето (10) односно (22), придружните триаголници ABC и XYZ ќе бидат предмет на една друга работа.

BIBLIOGRAFIJA

[1] Виктор Т. Јанекоски, За еден потребен и доволен услов за егзистенција на триаголник, овој *Билтен*, р. 85.

[2] O. Bottema, R. Ž. Đorđević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, Geometric Inequalities, Groningen 1969, p, 25, **2.25.**