Математички Билтен
18 (XLIV)
1994 (67-78)
Скопје, Македонија

ISSN 0351-336X

ЗА МЕТОДОЛОГИЈАТА НА РЕШАВАЊЕТО НА АРЕОЛАРНИТЕ И КОЊУГИРАНИТЕ РАВЕНКИ ОД ТИП И.Н.ВЕКУА СО АНАЛИТИЧКИ ПО $z,\bar{z}$ КОЕФИЦИЕНТИ

Драган Димитровски, Борко Илиевски

Познатата равенка на И.Н.Векуа (7), која што определува обопштени аналитички функции, обично се решава преку репрезентацијата на И.Н.Векуа во вид на интегрална равенка со интеграли од тип Denjoi-Théodorescu, која пак се решава скоро исклучиво низ итерации врзани за овој тип равенки. Како во монографијата [1] на И.Н.Векуа претпоставки за коефициентите A,B и F се многу општи, недостига еден комплетен третман за попростиот случај на коефициентите A,B и F - аналитички функции. Во овој труд ќе покажеме дека освен методата на функционалната анализа во случај на аналитички коефициенти се можни и поедноставни и поразновидни приоди кон решавањето.

Вовед. Општата линеарна система парцијални равенки од I-ви ред

$$\begin{aligned} a_1U_x + b_1U_y + c_1V_x + d_1V_y + e_1U + f_1V &= g_1 \\ a_2U_x + b_2U_y + c_2V_x + d_2V_y + e_2U + f_2V &= g_2, \end{aligned} \tag{1}$$

каде $a_i,b_i,c_i,d_i,e_i,f_i,g_i$ $(i=1,2)$ се диференцијабилни функции, може да се сведе на една линеарна парцијална равенка од II-ри ред по една од непознатите функции U или V. Ако системата (1) ја решиме по V_x и V_y, како непознати, добиваме

$$V_x = F(U,U_x,U_y;V), \quad V_y = G(U,U_x,U_y;V).$$

Со диференцирање на првата равенка по y, на втората по x и изедначување $V_{xy}=V_{yx}$, добиваме равенка

$$H(U_{xx},U_{xy},U_{yy},U_x,U_y,U;V_x,V_y,V) = 0.$$

Како се F,G и H линеарни функции по непознатите, тоа од H ако најдеме V и тоа V заедно со горните изводи V_x и V_y ги замениме во една од равенките (1), добиваме равенка од II-ри ред

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D\frac{\partial U}{\partial x} + E\frac{\partial U}{\partial y} + FU = G. \tag{2}$$

Равенката (2) е премногу општа и не позволува еден единствен третман. Затоа литературата е посветена обично на класи равенки (2) (или соодветни системи (1)).

Равенка Белтрами. Историски гледано, една од првите важни системи е следната система Белтрами

$$\sqrt{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x} - a\frac{\partial v}{\partial y} + b\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\sqrt{\Delta}\frac{\partial u}{\partial y} - b\frac{\partial v}{\partial y} + c\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

каде $\Delta=ac-b^2 > 0$; a,b,c се диференцијабилни функции (на пример при конформни пресликувања на површини, сведување на каноничен облик на елиптични равенки итн.). Таа е очигледно специјален случај на (1) и претставува едно од првите обопштувања на равенките на Cauchy-Riemman.

Ако во (3) се воведат комплексни променливи

$$z = x+iy,\ \bar{z} = x-iy; \qquad w = u(x,y)+iv(x,y) = w(z,\bar{z})$$

и операторни изрази

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{4}$$

кои што се викаат обопштен и коњугиран извод соодветно, добиваме комплексен запис на системата (3) во вид на една единствена равенка

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - g(z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

при што

$$g(z) = \frac{a-c+2bi}{a+c+2\sqrt{\Delta}}.$$

Равенката (3) се вика равенка Белтрами. Во просторот на функции од две комплексни променливи $w=w(z,\bar{z})$ таа игра улога на парцијална равенка од I-ви ред.

Не е тешко да се напишат најопшти системи (1) кои што се сведуваат на најопшта равенка Белтрами

$$a(z,\bar{z})\frac{\partial w}{\partial z} + b(z,\bar{z})\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + c(z,\bar{z})w = f(z,\bar{z}),$$

како и на равенка која што во себе содржи и коњугација на непознатата функција

$$a\frac{\partial w}{\partial z} + b\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + c\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + d\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + ew + f\bar{w} = g.$$

Равенка Векуа. Уште поспецијално, од (1), при некои мали ограничувања, се одделува системата

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv &= f \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + cu + dv &= g,\end{aligned} \tag{6}$$

која што со оглед на (4) може да се напише како една равенка

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(z,\bar{z})w+B(z,\bar{z})\bar{w} = F(z,\bar{z}) \tag{7}$$

позната под име равенка Векуа.

Ако коефициентите во (1) се аналитички функции од x и y, тогаш познато е дека и A,B и F во (7) се аналитички функции по $z,\bar{z}$.

I. Метода на интегрални равенки на И.Н.Векуа и репрезентација на решенијата на (7)

Случајот на аналитички коефициенти A,B,F е третиран во поголемиот труд од монографска природа [2] на И.Н.Векуа, а во ист дух и принцип и во монографијата [1] без да се прикажат и поедноставни методи. Основна идеја е сведување на (7) на една интегрална равенка со посебен вид двојни интеграли и претставување (репрезентација) на решението низ посебни коњугирани јадра. Имено, претпоставувајќи дека

$$A,B,F\in L_p(G), \quad p > 2 \tag{8}$$

и не одделувајќи го посебно попростиот аналитички случај, за којшто постои и друг апарат, Векуа својата равенка (7) ја запишува во интегрален облик

$$w(z) - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{A(\zeta)w(\zeta)+B(\zeta)\bar{w}(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{F(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta-z} + \phi(z), \tag{9}$$

при што $\zeta=\xi+i\eta\in G+\Gamma$, $z=x+iy\in G$; $\phi(z)$ - аналитичка функција, и ја докажува основната лема според која решението $w(z)$ може едноставно да се прикаже како

$$w(z,\bar{z}) = \phi(z)e^{\omega(z,\bar{z})}. \tag{10}$$

При ова $\phi(z)$ е аналитичка функција од z и $\omega(z,\bar{z})$ е функција определена со интегралот Denjoi-Théodorescu

$$\omega(z,\overline{z}) = -\frac{1}{\pi}\iint_G [A(\zeta)+B(\zeta)\frac{\overline{w(\zeta)}}{w(\zeta)}]\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} \tag{11}$$

за кој се докажува дека е непрекината цела функција. Како експонентот нема ниту нули ниту полови, тоа рангот, сингуларитетите и други битни својства на решението $w(z,\overline{z})$ се тие за аналитичката функција $\phi(z)$. Затоа решенијата (10) на равенката (7), кои што важат за аналитички коефициенти A и B, се викаат обопштени аналитички функции. Алгоритмот разработен од И.Н.Векуа и следбениците повеќе се однесува на мерливи, ограничени и недиференцијабилни коефициенти.

II. Метода на ареоларни редови

Уште во 1931 година Теодореску покажал дека равенката

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} + A(z,\overline{z})w = 0, \tag{12}$$

каде A е ограничена и мерлива функција, има општо решение

$$w(z,\overline{z}) = \phi(z)e^{\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{A(\zeta,\overline{\zeta})}{\zeta-z}d\xi d\eta} \tag{13}$$

со што е покажано како една равенка од облик (7) со неаналитички коефициенти има аналитичко решение во некоја поширока смисла.

Со цел да најде аналогно решение со (13) за коњугираната равенка Теодореску

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} + B(z,\overline{z})\overline{w} = 0 \tag{14}$$

а и со цел да најде адекватен аналитички израз за интегралот во (13), Б.Илиевски во својата теза [3] и во трудот [4], претпоставува дека во (14) B е аналитичка функција, во прв чекор само од z,

$$B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{15}$$

Како според [5] аналитичка равенка од I-ви ред има аналитичко решение, тоа е природно во (14) w да се бара во вид на ареоларен ред

$$w = \sum_{p,q=0}^{\infty} C_{pq} z^p \overline{z}^q. \tag{16}$$

Наоѓајќи $\overline{w}$ и $\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}$, методата на неопределени коефициенти не доведува до система равенки за C_{pq}, која што може да се реши за $q\neq 0$ еднозначно, додека C_{po} остануваат произволни. Така сите C_{pq} се изразуваат преку C_{po}. Таа зависност на решението (16) од C_{po}, на пример за равенката

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = z\bar{w}$$

е дадена со следната шема

$$\begin{aligned}
w = {} & C_{00} + \\
& + C_{10} z + 0 \\
& + C_{20} z^2 + \bar{C}_{00} z\bar{z} + 0 \\
& + C_{30} z^3 + 0 \quad + \frac{1}{2}\bar{C}_{10} z\bar{z}^2 + 0 \\
& + C_{40} z^4 + 0 \quad + \frac{1}{2!}C_{00} z^2\bar{z}^2 + \frac{1}{3}\bar{C}_{20} z\bar{z}^3 + 0 \\
& + C_{50} z^5 + 0 \quad + \frac{1}{2^2}C_{10} z^3\bar{z}^2 + 0 \quad + \frac{1}{4}\bar{C}_{30} z\bar{z}^4 + 0 \\
& + C_{60} z^6 + 0 \quad + \frac{1}{2\cdot 3}C_{20} z^4\bar{z}^2 + \frac{1}{3!}\bar{C}_{00} z^3\bar{z}^3 + 0 \quad + \frac{1}{5}\bar{C}_{40} z\bar{z}^5 + 0 \\
& + \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Стрелките по вертикалите и дијагоналите покажуваат начин на кондензација на редот и групирање на членовите со цел редот да зависи само од коефициентот B(z). Меѓутоа нужно некаде се јавува собирокот

$$\sum_{p=0}^{\infty} C_{po} z^p = \phi(z), \tag{17}$$

во кој C_{po} се произволни, и кој определува произволна аналитичка функција $\phi(z)$. На таков начин за равенката (14) со (15) добиваме решение во вид на ареоларен ред

$$\begin{aligned}
w(z,\bar{z}) = {} & \phi + \int B\bar{\phi}d\bar{z} + \int Bd\bar{z}\int \bar{B}\phi dz + \\
& + \int Bd\bar{z}\int \bar{B}dz\int B\bar{\phi}d\bar{z} + \int Bd\bar{z}\int \bar{B}dz\int Bd\bar{z}\int \bar{B}\phi dz + \\
& + \int Bd\bar{z}\int \bar{B}dz\int Bd\bar{z}\int \bar{B}dz\int B\bar{\phi}\, d\bar{z} + \dots ,
\end{aligned} \tag{18}$$

каде со оглед на симетричниот распоред лесно го продолжуваме редот, кој што зависи од интеграли на коефициентот B(z), и една произволна аналитичка функција $\phi(z)$. Гледаме дека произволниот аналитичен елемент $\phi(z)$ не е одделен како множител пред интегралот. Според основната лема на И.Н.Векуа дадена со (10) и (11), $\phi(z)$ може да се извлече како множител, но затоа постои дел од решението $\exp\omega(z,\bar{z})$, каде за ω важи (11), во кој што фигурира решението $w(\zeta)$. Поради ова (11) не е решение, туку квалитативна репрезентација на решението со цел лесна оценка и анализа на истото. Нашата формула (18) дава експлицитно решение за $w(z,\bar{z})$ и може да се смета за инверзија на w по ω од (11) и (10). Затоа природно врската меѓу w и $(B(z),\phi(z))$ не е линеарна, и би важела за изучуваната равенка (14) со (18):

$$w(z,\bar{z}) = \phi(z)e^{\omega(z)}, \qquad \omega(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G} B(\zeta)\frac{\overline{w(\zeta)}}{w(\zeta)}\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \tag{19}$$

каде можеме да сметаме дека <u>(18) е експлицитно, а (19) имплицитно решение</u>.

За хомогената равенка Векуа

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = A(z)w + B(z)\bar{w}, \tag{20}$$

со аналитички по z коефициенти, со метода на ареоларни редови лесно наоѓаме решение

$$\begin{aligned} w(z,\bar{z}) = {} & \phi + \left(\int A\phi d\bar{z} + \int B\bar{\phi} d\bar{z}\right) + \\ & + \left(\int A d\bar{z}\int A\phi d\bar{z} + \int A d\bar{z}\int B\bar{\phi}\, d\bar{z} + \int B d\bar{z}\int \bar{A}\bar{\phi} dz + \int B d\bar{z}\int \bar{B}\phi d\bar{z}\right) + \\ & + \left(\int A d\bar{z}\int A d\bar{z}\int A\phi d\bar{z} + \int A d\bar{z}\int A dz\int B\bar{\phi} dz + \right. \\ & + \int A d\bar{z}\int B d\bar{z}\int \bar{A}\bar{\phi} dz + \int A d\bar{z}\int B d\bar{z}\int \bar{B}\phi dz + \\ & + \int B d\bar{z}\int \bar{A} dz\int \bar{A}\bar{\phi} dz + \int B d\bar{z}\int \bar{A} dz\int \bar{B}\phi dz + \\ & \left. + \int B d\bar{z}\int \bar{B} dz\int \bar{A}\bar{\phi} d\bar{z} + \int B d\bar{z}\int \bar{B} dz\int \bar{B}\phi dz\right) + \\ & + \\ & \vdots \end{aligned} \tag{21}$$

каде со оглед на симетријата лесно можеме да напишеме било кој од 2^n членови со апроксимацијата со n интеграли. За B=0 добиваме решение Теодореску $w=\phi(z)e^{A(z)\bar{z}}$ а за A=0 добиваме решение (18). Методата на ареоларни редови технички е потешка од методата на интегрални равенки на И.Н.Векуа, но затоа пак за неа не треба некое големо теориско знаење од обопштени аналитички функции или функционална анализа.

III. Метода на итерации. Оператор на контракција $\hat{\int}$

Нека во равенката Векуа (7) коефициентите $A(z,\bar{z})$ и $B(z,\bar{z})$ се аналитички функции од двете комплексни променливи z и $\bar{z}$. Ако со $\hat{\int}$ означиме обратна операција од $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, имаме

$$w = \hat{\int}(Aw+B\bar{w}) = \int(Aw+B\bar{w})d\bar{z} + \phi(z). \tag{22}$$

Теорема. Операторот $\hat{\int}$ е оператор на контракција, ако се A и B аналитички коефициенти.

Доказ. Ако означиме

$$Tw = \int(Aw+B\bar{w})d\bar{z} + \phi(z),$$

тогаш е

$$|Tw_1-Tw_2| = |\int(Aw_1+B\bar{w}_1)d\bar{z}+\phi - \int(Aw_2+B\bar{w}_2)d\bar{z}-\phi| <$$

$$< |\int|A||w_1-w_2|\cdot|d\bar{z}| + \int|B||\overline{w_1-w_2}|\cdot|d\bar{z}|| <$$

$$< N \max_G|w_1-w_2|\int_\Gamma|d\bar{z}| = NM|\bar{z}| < NMh.$$

Понатаму,

$$|T^2w_1-T^2w_2| = |T(Tw_1)-T(Tw_2)| = |T(Tw_1-Tw_2)| \le$$

$$\le |\int A(Tw_1-Tw_2)d\bar{z}+\phi - \int B(\overline{Tw_1-Tw_2})d\bar{z}-\phi| \le$$

$$\le |\int|A|\cdot|Tw_1-Tw_2||d\bar{z}|+\int|B||\overline{Tw_1-Tw_2}||d\bar{z}| \le$$

$$\le |\int(|A|+|B|)|Tw_1-Tw_2||d\bar{z}| \le 2N\int|Tw_1-Tw_2||d\bar{z}| \le$$

$$\le 2N\int|d\bar{z}|[|\int|A||w_1-w_2||d\bar{z}|+\int|B||\overline{w_1-w_2}||d\bar{z}|] \le$$

$$\le 2^2N^2 \max_G|w_1-w_2|\int|d\bar{z}|\int|d\bar{z}| < 2^2N^2M\frac{|\bar{z}|^2}{2!} <$$

$$< 2N^2Mh^2,$$

каде $N = \max\limits_{G}(|A|,|B|)$, $M = \max\limits_{G}|w_1-w_2|$ и $|\bar{z}| < h$ на G.

Лесно со индукција констатираме дека важи

$$|T^n w_1 - T^n w_2| = |T(T^{n-1}w_1)-T(T^{n-1}w_2)| \le$$

$$\le \underbrace{\int(|A|+|B|)|d\bar{z}|\int(|A|+|B|)|d\bar{z}|\cdots\int}_{n\text{-пати}}(|A|+|B|)|w_1-w_2||d\bar{z}| \le$$

$$\le 2^n N^n \max_{G}|w_1-w_2|\cdot\frac{|\bar{z}|^n}{n!} \le M\frac{(2N)^n h^n}{n!}.$$

Како $\frac{(2Nh)^n}{n!}$ може да се направи помало од 1, дури и произволно мало, тоа ќе важи

$$||T^n w_1 - T^n w_2|| < ||w_1 - w_2||$$

што значи дека операторот T е оператор на контракција.

Како по Теорема на Коши [5], поради непрекинатоста на десната страна, равенката има непрекинато решение, тоа за равенката (7) ќе важи принцип на фиксна точка, т.е. единственото решение w може да се најде со итерации од (22). Ако ставиме

$$w_1 = \int(Aw+B\bar{w})d\bar{z} + \phi(z)$$

и ако на местото w на десна страна ставиме w_1, имаме

$$w_2 = \int(Aw_1+B\bar{w}_1)d\bar{z} + \phi(z),$$

од каде

$$w_2 = \int[A(\int A\bar{w}d\bar{z}+\int B\bar{w}\; d\bar{z}+\phi)]d\bar{z} +$$

$$+ \int[B(\overline{\int Awd\bar{z}+\int B\bar{w}d\bar{z}+\phi})]d\bar{z} + \phi(z) =$$

$$= \int Ad\bar{z}\int Awd\bar{z} + \int Ad\bar{z}\int B\bar{w}d\bar{z} + \int A\phi d\bar{z} +$$

$$+ \int Bd\bar{z}\int\bar{A}\bar{w}dz + \int B\int\bar{B}wdz + \int B\bar{\phi}d\bar{z} + \phi$$

или, ако подредиме

$$w_2 = \phi + \int A\phi d\bar{z} + \int B\bar{\phi}d\bar{z} + R_2,$$

каде

$$R_2 = \int A d\bar{z} \int A w d\bar{z} + \int A d\bar{z} \int B\bar{w} d\bar{z} +$$
$$+ \int B d\bar{z} \int \bar{A}\bar{w} d z + \int B d z \int \bar{B} w d z$$

игра улога на остаток.

Слично, ако сега во R_2 на местото од w ставиме w_1 и подредиме ќе добиеме трета апроксимација

$$w_3 = \phi + \int A\phi d\bar{z} + \int B\bar{\phi} d\bar{z} + \int A d\bar{z} \int A\phi d\bar{z} + \int A d\bar{z} \int B\bar{\phi} d z +$$
$$+ \int B d\bar{z} \int \overline{A\phi} d z + \int B d\bar{z} \int \bar{B}\phi d z + R_3, \tag{22}$$

каде остатокот R_3 сега има 8 членови и лесно се оценува.

По таков начин и со методата на итерации ја добиваме формулата (21), добиена со ареоларни редови.

IV. Метода на аналитичка замена за равенки од тип Векуа од повисок ред

Да земеме равенка од II-ри ред со коњугација на функцијата

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = A(z,\bar{z})\bar{w}, \tag{23}$$

каде A е аналитичка функција по $z,\bar{z}$; и која според тоа спаѓа во класата равенки на И.Н.Векуа.

Ако напишеме прв интеграл

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \hat{\int} A(z,\bar{z})\bar{w} = \int A\bar{w} d\bar{z} + \phi_1(z), \tag{24}$$

како според теоремата Коши десната страна е аналитичка, имаме на ист начин

$$w = \hat{\int} [\int A\bar{w} d\bar{z} + \phi_1(z)] = \iint A\bar{w} d\bar{z}^2 + \phi_1(z)\bar{z} + \phi_2(z). \tag{25}$$

Лесно се покажува дека и за (25) важи методот на итерации, т.е. наместо $\bar{w}$ во десната страна на (25) можеме да ставиме w определено со истата (25). Добиваме

$$w(z,\bar{z}) = \phi_1 + \phi_2\bar{z} + \iint A\bar{\phi}_1 d\bar{z}^2 + \iint A\bar{\phi}_2 d\bar{z}^2 +$$
$$+ \iint Ad\bar{z}^2 \iint \bar{A}\phi_1 dz^2 + \iint Ad\bar{z}^2 \iint \bar{A}\phi_2 \bar{z} dz^2 + \tag{26}$$
$$+ \iint Ad\bar{z}^2 \iint \bar{A}d\bar{z} \iint A\bar{\phi}_1 d\bar{z}^2 + \iint Ad\bar{z}^2 \iint \bar{A}dz^2 \iint A\phi_2 z d\bar{z}^2 +$$
$$+ \iint Ad\bar{z}^2 \iint \bar{A}dz^2 \iint Ad\bar{z}^2 \iint \bar{A}wdz^2,$$

каде што последниот член игра улога на остаток. Во случај на аналитички коефициент, т.е. $|A(z,\bar{z})| < M$, лесно се согледува брза конвергенција од оценката

$$|R| \le |w| \cdot M^{2n}/(2n)!$$

За полна равенка од II-ри ред

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = A(z,\bar{z})\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + B(z,\bar{z})w + C(z,\bar{z})\bar{w} \tag{27}$$

можеме на исти начин да ставиме

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \int A\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}d\bar{z} + \int Bwd\bar{z} + \int C\bar{w}d\bar{z} + \phi_1 \tag{28}$$

и

$$w = \iint A\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}d\bar{z}^2 + \iint Bwd\bar{z}^2 + \iint C\bar{w}d\bar{z}^2 + \phi_1\bar{z} + \phi_2 \tag{29}$$

Ако на десната страна во (29) замениме $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ со (28), а w и $\bar{w}$ со истата (29), лесно добиваме конвергентни итерации.

Формулите (28) и (29) формираат <u>метода на аналитичка замена</u> за равенка И.Н.Векуа. Таа е едноставна метода со брза конвергенција, поради аналитичноста на коефициентите.

Слично, за равенката

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} = A(z,\bar{z})\bar{w} \tag{30}$$

ќе важи

$$\frac{\partial^{n-1} w}{\partial \bar{z}^{n-1}} = \int A\bar{w}d\bar{z} + \phi_1$$

$$\frac{\partial^{n-2} w}{\partial \bar{z}^{n-2}} = \iint A\bar{w}d\bar{z}^2 + \phi_1\bar{z} + \phi_2$$

$$\frac{\partial^{n-3} w}{\partial \bar{z}^{n-3}} = \iiint A\bar{w}d\bar{z}^3 + \phi_1\frac{\bar{z}^2}{2} + \phi_2\bar{z} + \phi_3 \tag{31}$$

$$\vdots$$

$$w = \underbrace{\iint\ldots\int}_{n} Awd\bar{z}^n + \sum_{k=0}^{n-1}\phi_k(z)\frac{\bar{z}^k}{k!}$$

каде на десната страна на местото од $\bar{w}$ може да се стави истото w.

На овој начин, предлагаме уште две методи: метода на ареоларни редови и метода на аналитичка замена за решавање равенки од тип Векуа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И.Н.Векуа: Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, Москва, 1959

[2] И.Н.Векуа: Система дифференциальных уравнений первого порядка элиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек, Математический Сборник, 31(73) 2, 1952, 217-314

[3] Б.Илиевски: Линеарни ареоларни равенки, докторска теза, Скопје, 1992

[4] B.Ilievski: On some quadratures in certain special classes of the Vekua equations, BULLETIN de la sociéte des mathem. et des inform. de Macedoine, 17(XLIII), Skopje, 1993, 75-82

[5] D.Dimitrovski, B.Ilievski: L'équation différentielle aréolaire analytique, PRILOZI MANU, Macedonian Academy of Arts and Sciences, II, 1-2, 1984, 25-39, Skopje, Macédonie

ABOUT THE METHODOLOGY FOR SOLVING AREOLAR AND CONJUGATE EQUATIONS OF I.N. VEKUA TYPE WHICH HAVE ANALYTIC IN z AND $\bar{z}$ COEFFICIENTS

D.Dimitrovski and B.Ilievski

Summary

In this paper first is described the method of I.N.Vekua, based on the Theororescu's operator $T_G w$, for solving integral equations. We proposed other two methods for solving equations with conjugate derivative

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = F(z,\bar{z},w,\bar{w}),$$

where F is analytical function of its arguments. This methods are:

1) Method of areolar series,

2) Method of analytical changes.

Dragan Dimitrovski,
Borko Ilievski
Prirodno-matematički fakultet
Institut za matematika
p.f. 162
91000 Skopje, Macedonia