ЗА ВРЕДНОСТА НА НЕКОИ КОМПЛЕКСНИ ИНТЕГРАЛИ

Драган С. Димитровски

Во својот курс [1], [2] Gaston Julia решава доста општи класи комплексни интеграли. На сличен начин Д. Митровиќ [3[ја генерализира познатата формула на Jensen, обопштувајки ја постапката на Julia.

Наша цел е, ползувајќи ги наведените методи и обединувајќи ги во извесна смисла, да се пресметаат пошироки класи комплексни интеграли. Специјално можат да се одделат класи реални определени интеграли како поинтересни последици.

I. Нека е S една затворена област и C нека е граница на таа област. $f(z)$ нека биде еднозначна аналитичка функција која во S има само есенцијални сингуларитети и полови во конечен број. Нека $g(z)$ биде мероморфна функција во S. Наша цел е да се пресмета интегралот

$$\int_C f(z) \log g(z)\, dz \tag{1}$$

под претпоставка $f(z)$ и $g(z)$ да се непрекинати по контурата C. Со a_k ќе ги означиме половите на $f(z)$, од ред n_k, нив p на број, со α_k нулите на $g(z)$, од ред μ_k, нив r на број, со β_k половите на $g(z)$, од ред ν_k, нив s на број. Со λ_k, ќе ги означиме есенцијалните сингуларитети на $f(z)$, нив q на број. Ќе претпоставиме дека ниеден од сингуларитетите a_k, γ_k на функцијата $f(z)$ не се поклопува со ниеден сингуларитет α_k, β_k на $g(z)$. Ќе претпоставиме дека $f(z)$ има примитивна функција $F(z)$. За да можеме да ја примениме теоријата на интегралите од еднозначни функции, во областа S ке извршиме прорези со кои се изолираат точките на гранањето на логаритмот, т. е. ќе ги изолираме точките α_k и β_k со прорези кои меѓу себе не се сечат, и кои сите почнуваат од една заедничка точка A од C. Ќе ги означиме овие прорези со λ_k. Обиколувајќи ја контурата C во позитивен смер почнувајќи од A, при завршувањето на обиколувањето, сите прорези λ_k се обиколуваат во спротивен смер, и интегралот од $f(z) \log G(z)$, земен по контурата $C \setminus U\lambda_k$, претставува една еднозначна функција. Теоремата на Cauchy тогаш дава:

$$\int_C f(z)\log g(z)\,dz + \sum_{\alpha_k,\,\beta_k}\int_{\lambda_k} f(z)\log g(z)\,dz =$$

(2)

$$= 2\pi i\left\{\sum_{z=a_k}\operatorname{Res} f(z)\log g(z) + \sum_{z=\gamma_k}\operatorname{Res} f(z)\log g(z)\right\}$$

каде за пресметувањето на интегралите од десната страна е потребно да се знае Laurent-овиот развој на $f(z)$ во околина на секој пол a_k и секоја изолирана есенцијална точка γ_k. Нека со $A_{k,\,n}$ го означиме коефициентот од Laurent-овиот развој во околина на полот a_k од ред n, и нека со $B_{k,\,n}$ ги означиме коефициентите на Laurent-ов ред во околина на $z=\gamma_k$. Развивајќи ја функцијата $\log g(z)$ во Тајлоров ред во околина на $z=a_k$ и $z=\gamma_k$ се наоѓаат остатоците на $f(z)\log g(z)$ во точките a_k и γ_k па спрема тоа и вредноста на интегралите од десна страна. Сумата пак од лева страна се пресметува по вообичаена постапка, имајки предвид да е

$$g(z) = (z-\alpha_k)^{\mu_k}\cdot g_1(z)$$

каде $g_1(z)$ е регуларна во и по соодветниот разрез λ_k.

За интегралите (1) така добиваме формула:

$$\int_C f(z)\log g(z)\,dz =$$

(3)

$$= 2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{p}\left[A_{k,\,1}\cdot \operatorname{Log} g(a_k) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{A_{k,\,i+1}}{i!}\,\mathbf{D}_z^{(i-1)}\left\{\frac{g'(z)}{g(z)}\right\}_{z=a_k}\right]\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{q}\left[B_{1,\,k}\cdot \operatorname{Log} g(\gamma_k) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_{k,\,\nu+1}}{\nu!}\,\mathbf{D}_z^{(\nu-1)}\left\{\frac{g'(z)}{g(z)}\right\}_{z=\gamma_k}\right]$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{r}\mu_k\Big[F(\alpha_k)-F(A)\Big]-\sum_{k=1}^{s}\nu_k\Big[F(\beta_k)-F(A)\Big]\right\}.$$

каде $D_z^{(i)}$ е симбол на диференцирање, додека вредноста на $\log g(z)$ во $z=a_k$ и $z=\gamma_k$ е детерминирана на следниот начин: се претполага дека се поаѓа од точката A со дадена вредност на $g(A)$ (се подразбира модул и аргумент). Логаритамот е тогаш потполно определен во A, нека е неговата вредност $\operatorname{Log} g(A)$. Потоа се тргнува по разрезот од A кон a_k (или γ_k) кој не ги сече останалите разрези; вредноста на логаритамот тогаш се менува рамномерно. Така доаѓаме без тешкотии до $\operatorname{Log} g(a_k)$—вредноста на $\log g(z)$ во $z=a_k$. Што се однесува пак до вредноста на $F(z)$, примитивната функција за $f(z)$, која во општ случај не е униформна во точките α_k и β_k, се постапува на исти начин, движејќи се непрекинато по соответните разрези од A кон α_k или β_k.

II. Случајот кога некој пол на $f(z)$ се поклопува со некој пол или нула на $g(z)$ е проучен од G. Julia. Ќе сториме сега поширока претпоставка: нека некој есенцијален сингуларитет γ на функцијата $f(z)$ се поклопува со некоја нула α или пол β на функцијата $g(z)$. Формулата (3) тогаш природно не важи. Ќе ја означиме таа точка со ξ, и нека η е нејзината кратност. Тогаш е

$$g(z) = (z-\xi)^{\eta} \cdot g_1(z) \tag{4}$$

и нека развојот на $f(z)$ во околина на $z=\xi$ во Laurent-ов ред гласи

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C-m\,(z-\xi)^m \,. \tag{5}$$

Тогаш е

$$f(z) \log g(z) = \eta\, f(z) \log (z-\xi) + f(z) \log g_1(z), \tag{6}$$

каде што развојот на регуларната функција $\log g_1(z)$ во околината на ξ во Тајлоров ред гласи

$$\log g_1(z) = \operatorname{Log} g_1(\xi) + \frac{g_1'(\xi)}{g_1(\xi)}(z-\xi) + \frac{(z-\xi)^2}{2\,!}\, \mathbf{D}_z' \left(\frac{g_1'(z)}{g_1(z)}\right)_{z=\xi} + \dots \tag{7}$$

Под овие претпоставки интегралот на (6) земен по должина λ_ξ на прорезот што го изолира сингуларитетот ξ може да се пресмета со помошта на остатоците на двата собирка од десна страна на (6), што се добиваат со помошта на развоите (5) и (7); при што се јавуваат членови од облик:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \eta \int_{\lambda_\xi} C-m\,(z-\xi)^m \log (z-\xi)\, dz \tag{8}$$

кои се решаваат со помошта на парцијална интеграција. Така за интегралите земени по сите лацети $\lambda\xi_j$ кои ги изолираат заедничките сингуларитети ξ_j добиваме

$$\sum_{\xi_j} \int_{\lambda\xi_j} f(z) \log g(z)\, dz =$$

$$= \sum_{\xi_j} \left\{ -2\pi i \left[C_1 \operatorname{Log} g_1(\xi_j) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{k+2}}{(k+1)!}\, \mathbf{D}_z^{(k)} \left| \frac{g'_1(z)}{g_1(z)} \right|_{z=\xi_j} \right] \right. \tag{9}$$

$$+ 2\pi i \eta_j \left[\pi i - \log (A-\xi_j) + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq -1}}^{+\infty} C_{-m} \frac{(A-\xi_j)^{m+1}}{m+1} \right] \Bigg\}.$$

каде вредноста на логаритмот е дадена спрема напред дадените напатствија.

Во најопшт случај, кога некои сингуларитети се поклопуваат, интегралот (1) е еднаков на сума од десни страни на (3) и (9).

III. Нека во интегралот

$$\int_C f(z) \log g(z)\, dz \tag{10}$$

$f(z)$ сега биде мероморфна, а $g(z)$ еднозначна, со полови и изолирани есенцијални сингуларитети. Нека со a_k ги означиме половите на $f(z)$, нив p на број, и нека нулите на $g(z)$, по претпоставка нив l на број, ги означиме со α_k, половите на $g(z)$, m на број, со β_k, и изолираните есенцијални сингуларитети, нив n на број, со γ_k. Со $F(z)$ да ја означиме примитивната функција на $f(z)$, која, во општ случај, не е еднозначна. Ќе претпоставиме уште дека ниеден пол a_k на $f(z)$ не коинцидира со ниеден сингуларитет на $g(z)$. Тогаш една постапка слична на таа под I. и II. ни дава:

$$\int_C f(z) \log g(z)\, dz =$$

$$= 2\pi i \Bigg\{ \sum_{k=1}^{p} \left[A_{k,1} \operatorname{Log} g(a_k) + \sum_{\nu=2}^{q_k} \frac{A_{k,\nu}}{(\nu-1)!} \mathbf{D}_z^{(\nu-2)} \left(\frac{g'(z)}{g(z)} \right)_{z=a_k} \right]$$

$$- \sum_{k=1}^{l} M_k \left(F(\alpha_k) - F(A)\right) - \sum_{k=1}^{m} N_k \left(F(\beta_k) - F(A)\right) \tag{11}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \left[F(\gamma_k) B_{1,k} - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\nu,k} \frac{F^{(\nu-1)}(\gamma_k)}{(\nu-1)!} \right] \Bigg\}.$$

каде означивме со $A_{k,1}$ остаток на $f(z)$ за пол a_k, со $A_{k,i}$ коефициенти во Laurent-овиот развој на $f(z)$ околу полот A_k, со D_z^ν симбол на диференцирање по z, со M_k позитивните цели броеви — редови на нулите α_s на $g(z)$, со N_k негативните цели броеви-редови на половите β_k на $g(z)$, со A почетна и крајна точка на интеграцијата, со $B_{1,k}$ резидуумот за есенцијалниот сингуларитет γ_k, и со $B_{\nu,k}$ коефициентите во Лорановиот развој што се наоѓаат до негативните степени на функцијата $g'(z)/g(z)$.

Определувањето на вишезначните големини $\log g(z)$ и $F(z)$ во горната формула оди спрема горните правила.

Една природна генерализација на формулата (11) би бил случајот кога $f(z)$ и $g(z)$ би биле еднозначни функции, но со произволен број полови, нули и есенцијални сингуларитети, кои можат да се поклопуваат во произволен однос. Тогаш би добиле еден многу покомплициран резултат.

Забелешка. Нека е $f(z) = \frac{1}{z}$ и нека $g(z)$ има само еден есенцијален сингуларитет. Како е $F(z) = \ln z$, ја добиваме од (11) веднаш формулата на Митровиќ:

$$(12) \qquad \int_C \frac{\log g(z)}{z}\, dz = 2\pi i \log g(o) + 2\pi i \left[B_1 \log \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n a^n} \right]$$

каде што a е есенцијален сингуларитет на $g(z)$ во кругот $|z| = r$. За иста $f(z)$, ако за $g(z)$ претпоставиме да во кругот $|z| = r$ има n нули a_i и p пола b_j, од (11) ја добиваме формулата на Jensen:

$$(13) \qquad \int_O^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})|\, d\theta = \log g(o) + \sum_{i=1}^{n} \log \frac{r}{|a_i|} - \sum_{j=1}^{p} \log \frac{r}{|b_j|} .$$

IV. Цел ни е да се пресмета интегралот

$$\int_C \log f(z) \cdot \log g(z)\, dz$$

каде $f(z)$ и $g(z)$ се мероморфни функции, такви да некој пол или нула взаимно можат и да коинцидираат, а C е Жорданова контура која затвара конечна проста област S. Би добиле во тој случај

$$\int_C \log g(z) \cdot \log f(z)\, dz =$$

$$(14) \qquad = 2\pi i \left\{ \sum_{p=0}^{r} r_p \sum_{\nu=0}^{n} r_\nu \left[(A-a_\nu) \log (A-a_\nu) - (a_p - a_\nu) \log (a_p - a_\nu) + a_p - A \right] \right.$$
$$\left. + \sum_{l,p} \left[\gamma_l(A) - \gamma_l(\alpha_p) \right] + 2 \sum_{\xi_k} p_k (A + \xi_k) \left[1 - \log (A - \xi_k) + i\pi \right] \right\},$$

каде што се a_ν нули или полови на $f(z)$ од ред r_ν, a_p нули или полови на $g(z)$ од ред r_p, кои не коинцидираат со a_ν; A почетна точка на интеграцијата; $\gamma_l(z)$ примитивна функција за оној дел од $\log f(z) \cdot \log g(z)$ кој што е цела функција во S, додека е $\alpha_p = a_\nu$ или a_p. Со ξ_k ги означивме оние нули (или полови) на $f(z)$ и $g(z)$ кои коинцидираат, со p_k нивната кратност. Вишезначните големини се определени и овде спрема истите напред дадени правила.

Специјален случај. Нека е $f(z) = \text{const}$. Тогаш ја добиваме познатата формула Julia:

$$\int_C \log g(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=0}^{n} \mu_j (A - \alpha_j) \tag{15}$$

каде се α_j нули и полови на $g(z)$ со кратност μ_j, A почетна точка на интеграцијата.

V. Горните формули имаат примена врху класите определени реални несвојствени интеграли. Нека е специјално C контура составена од делот на реалната оска меѓу $-R$ и $+R$ и од полукругот $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Нека $f(z)$ биде мероморфна и нека нема реални нули и полови, а освен тоа нека исполнува услов $f(z) \to 0$, $z \to \infty$, униформно по φ за $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Нека $g(z)$ нема реални нули. Тогаш од (3) можеме да добиеме формула за доста широка класа несвојствени интеграли од облик

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \log g(x)\, dx.$$

Постапувајки аналогно, со соответни претпоставки за $f(z)$ и $g(z)$ можеме да одделиме и други формули што се однесуваат до реални интеграли.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gaston Julia, Cours d' Analyse, t. II, 202⁰.

[2] Gaston Julia, Exercises d' Analyse, tome II, fasc. I, chap. III, p. 203.

[3] Драгиша Митровиќ, „Sur quelques intégrales définies", „Гласник математичко-физички и астрономски", т. X, Загреб 1955.

Dragan S. Dimitrovski

SUR QUELQUES INTÉGRALES COMPLÈXES

Résumé

On généralise les méthodes données par G. Julia et D. Mitrović pour résoudre quelques intégrales complèxes. On donne les méthodes et les formules relatives aux intégrales suivantes:

I. $\displaystyle\int_C f(z) \log g(z)\, dz$ (3) avec (9)

$f(z)$ étant une fonction analytique uniforme, n'ayant dans C que les pôles et singularités essentielles isolées, $g(z)$ étant méromorphe.

II.
$$\int_C f(z) \log g(z)\, dz \tag{11}$$

$f(z)$ étant méromorphe, $g(z)$ ayant les zéros, pôles et les singularités essentielles en un nombre fini.

III.
$$\int_C \log f(z) \cdot \log g(z)\, dz \tag{14}$$

$f(z)$ et $g(z)$ supposées fonctions méromorphes, avec la coïncidance permise entre un certain nombre des pôles ou des zéros.