SUR DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DERIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE TRANSFORMABLES EN ELLES-MÊMES PAR UN CHANGEMENT DE FONCTION

ILIJA A. ŠAPKAREV

1. Lorentz a démontré {voir, par exemple [1]} que l'équation de D'Alembert

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0,$$

par le changement des variables indépendantes

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

se transforme en elle-même.

Dans cet article nous allons donner les conditions sous lesquelles l'équation de Laplace

$$\text{(a)}\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+a\,(x,\,y)\,\frac{\partial z}{\partial x}+b\,(x,\,y)\,\frac{\partial z}{\partial y}+c\,(x,y)\,z+d\,(x,y)=0,$$

par le changement de fonction

$$\text{(b)}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}+az=z_1$$

se transforme en elle-même.

L'équation (a), par le changement (b), se transforme en elle-même, si l'on a

$$b=\int\frac{\partial a}{\partial x}\partial y+j\,(x),\qquad c=\frac{\partial a}{\partial x}+a\int\frac{\partial a}{\partial x}\partial y+af(x)+g\,(x),$$

$$d=h\,(x)\,e^{\int(1-a)\,\partial y},$$

où $f(x)$, $g\,(x)$, $h\,(x)$ sont des fonctions arbitraires de x.

Dans ce cas, sa solution particulière est

$$z = \left[C - \int h e^{\int (f+g)\, dx} \, dx \right] e^{\int (1-a)\, \partial y - \int (f+g)\, dx},$$

et sa intégrale complète, pour $g = m$ ($m = const$), est

$$z = \left[C_2 e^{(m+r)x-(s+1)y} + C_3 e^{(s+m)x-(r+1)y} + C_4 e^{(m-r)x+(s-1)y} \right.$$

$$\left. + C_5 e^{(m-s)x+(r-1)y} + C - \int h e^{\int (f+g)\, dx} dx \right] e^{\int (1-a)\, \partial y - \int (f+g)\, dx}$$

où

$$r = \sqrt{-\frac{C_1}{2} + \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - m^2}}, \qquad s = \sqrt{-\frac{C_1}{2} - \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - m^2}},$$

et C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sont des constantes arbitiaires.

2. L'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + d = 0 \tag{1}$$

où les coefficients a, b, c, d sont des fonctions données des variables indépendantes x et y peut toujours s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) + d = \mu z \qquad \left(\mu = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c\right) \tag{2}$$

ou

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + b z_1 + d = \mu z \tag{3}$$

en posant

$$\frac{\partial z}{\partial y} + az = z_1. \tag{4}$$

Si l'on élimine z entre les deux équations (3) et (4), pour $\mu \neq 0$, on est conduit a la nouvelle équation, de même que la première

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} + a_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 + d_1 = 0, \tag{5}$$

où l'on a

$$\begin{aligned} a_1 &= a + \frac{\partial ln\mu}{\partial y}, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c - \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial ln\mu}{\partial y}, \\ d_1 &= d\left(a - \frac{\partial ln\mu}{\partial y}\right) + \frac{\partial d}{\partial y}. \end{aligned} \tag{6}$$

Donc, l'équation (1), dans le cas où $\mu \neq 0$, par le changement (4), se transforme en équation (5).

Pour que l'équation (1), par le changement (4), se transforme en elle-même, il faut que le système suivant

$$(7) \qquad \begin{aligned} a_1 = a, \quad b_1 = b, \\ c_1 = c, \quad d_1 = d, \end{aligned}$$

soit satisfait.

Du système (7), d'après (6), on obtient

$$b = \int \frac{\partial a}{\partial x}\,\partial y + f(x), \quad c = \frac{\partial a}{\partial x} + a \int \frac{\partial a}{\partial x}\,\partial y + af(x) + g(x),$$

$$d = h(x)\, e^{\int (1-a)\,\partial y},$$

où $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ sont des fonctions arbitraires de x.

Par suite, on peut énoncer le résultat suivant:

L'équation aux dérivées partielles suivante

$$(8) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + \left[\int \frac{\partial a}{\partial x}\,\partial y + f(x)\right]\frac{\partial z}{\partial y} + \left[\frac{\partial a}{\partial x} + a\int \frac{\partial a}{\partial x}\,\partial y + af(x) + g(x)\right] z$$

$$+ h(x)\, e^{\int (1-a)\,\partial y} = 0,$$

par le changement de fonction

$$\frac{\partial z}{\partial y} + az = z_1,$$

se transforme en elle-même.

Si dans l'équation (4) on pose $z_1 = z$, elle devient

$$(9) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} + (a-1)\,z = 0.$$

De l'équation (9) il suit

$$(10) \qquad z = \alpha(x)\, e^{\int (1-a)\,\partial y},$$

où $\alpha(x)$ est une fonction arbitraire de x.

Pour que la fonction z, determinée par la relation (10), soit une intégrale de l'équation (8), la fonction $\alpha(x)$ doit vérifier à l'équation suivante

$$(11) \qquad \alpha' + (f+g)\,\alpha + h = 0,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = e^{-\int (f+g)\,dx}\left[C - \int h\, e^{\int (f+g)\,dx}\, dx\right], \tag{12}$$

où C est une constante d'intégration.

Par suite, l'équation (8) a comme solution particulière

$$z = \left[C - \int h e^{\int (f+g)\,dx}\, dx\right] e^{\int (1-a)\,\partial y - \int (f+g)\,dx}. \tag{13}$$

L'équation (8), par le changement

$$z = u + \alpha e^{\int (1-a)\,\partial y}$$

se transforme en équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \left[\int \frac{\partial a}{\partial x}\partial y + f(x)\right]\frac{\partial u}{\partial y} + \left[\frac{\partial a}{\partial x} + a\int\frac{\partial a}{\partial x}\partial y + af(x) + g(x)\right]u = 0. \tag{14}$$

Puisque l'équation (14), par le changement

$$\frac{\partial u}{\partial y} + au = u_1,$$

se transforme aussi en elle-même, il suit qu'elle a comme solution particulière

$$u = \beta(x)\, e^{\int (1-a)\,\partial y},$$

où

$$\beta(x) = C' e^{-\int (f+g)\,dx}.$$

L'équation (14), par le changement

$$u = \beta v e^{\int (1-a)\,\partial y},$$

se transforme en équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - g\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{15}$$

Dans le cas où $g = m$ ($m = const$), l'équation (15), par le changement

$$v = we^{\gamma x + \delta y} \quad (\gamma,\ \delta = constantes),$$

se transforme en équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + (\delta + 1)\frac{\partial w}{\partial x} + (\gamma - m)\frac{\partial w}{\partial y} + (\gamma\delta + \gamma - m\delta)\, w = 0,$$

qui, pour $\gamma = m$, $\delta = -1$, devient

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + mw = 0.$$

L'intégrale complète de la dernière équation est

$$w = C_2 e^{rx-sy} + C_3 e^{sx-ry} + C_4 e^{-rx+sy} + C_5 e^{-sx+ry},$$

où

$$r = \sqrt{-\frac{C_1}{2} + \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - m^2}}, \qquad s = \sqrt{-\frac{C_1}{2} - \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - m^2}},$$

et C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sont des constantes arbitraires.

Par suite, l'intégrale complète de l'équation (8) est

$$(16) \qquad z = e^{\int (1-a)\,\partial y - \int (f+g)\,dx} \Big[C_2 e^{(m+r)x-(s+1)y} + C_3 e^{(m+s)x-(r+1)y}$$

$$+ C_4 e^{(m-r)x+(s-1)y} + C_5 e^{(m-s)x+(r-1)y} + C - \int h e^{\int (f+g)\,dx}\, dx \Big].$$

Exemples: 1° L'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 y \frac{\partial z}{\partial x} + (xy^2 + 1)\frac{\partial z}{\partial y} + (2xy + x^3 y^3 + x^2 y - 1) z + exp\left(y - \frac{x^2 y^2}{2}\right) = 0,$$

par le changement de fonction

$$\frac{\partial z}{\partial y} + x^2 yz = z_1,$$

se transforme en elle-même. Elle a comme solution particulière

$$z = (C - x)\, exp\left(y - \frac{x^2 y^2}{2}\right),$$

et par le changement

$$z = u + (C - x)\, exp\left(y - \frac{x^2 y^2}{2}\right)$$

se transforme en équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 y \frac{\partial u}{\partial x} + (xy^2 + 1)\frac{\partial u}{\partial y} + (2xy + x^3 y^3 + x^2 y - 1)u = 0.$$

Puisque la dernière équation, par le changement

$$\frac{\partial u}{\partial y} + x^2 yu = u_1,$$

se transforme aussi en elle-même, elle a comme solution particulière

$$u = exp\left(y - \frac{x^2 y^2}{2}\right)$$

et par le changement

$$u = v\, exp\left(y - \frac{x^2 y^2}{2}\right)$$

se transforme en équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

qui, par le changement

$$u = we^{-x-y}$$

devient

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - w = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$w = C_2 e^{rx-sy} + C_3 e^{sx-ry} + C_4 e^{-rx+sy} + C_5 e^{-sx+ry},$$

où

$$r = \sqrt{-\frac{C_1}{2} + \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - 1}}, \qquad s = \sqrt{-\frac{C_1}{2} - \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - 1}},$$

et C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sont des constantes arbitraires.

Par suite, l'intégrale complète de l'équation proposée est

$$z = \left(C_2 e^{rx-sy} + C_3 e^{sx-ry} + C_4 e^{-rx+sy} + C_5 e^{-sx+ry}\right) e^{-\left(\frac{x^2 y^2}{2} + x\right)}$$
$$+ (C - x)\, exp\left(y - \frac{x^2 y^2}{2}\right).$$

2° L'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + xyz + e^{x-xy} = 0,$$

par le changement de fonction

$$\frac{\partial z}{\partial x} + yz = z_1$$

se transforme en elle-même. Elle a comme solution particulière

$$z = e^{x-xy}$$

et par le changement

$$z = u + e^{x-xy}$$

se transforme en équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xyu = 0.$$

Puisque la dernière équation, par le changement

$$\frac{\partial u}{\partial x} + yu = u_1,$$

se transforme aussi en elle-même, elle a comme sulution particulière

$$u = e^{x-xy+y}$$

et par le changement

$$u = ve^{x-xy+y}$$

se transforme en équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

qui, par le changement

$$v = we^{-x-y}$$

denient

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - w = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$w = C_2 e^{rx-sy} + C_3 e^{sx-ry} + C_4 e^{-rx+sy} + C_5 e^{-sx+ry},$$

$$r = \sqrt{-\frac{C_1}{2} + \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - 1}}, \qquad s = \sqrt{-\frac{C_1}{2} - \sqrt{\frac{C_1^2}{4} - 1}},$$

et C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sont des constantes d'intégration.

Par conséquent, l'intégrale complète de l'équation proposée est

$$z = \left(C_2 e^{rx-sy} + C_3 e^{sx-ry} + C_4 e^{-rx+sy} + C_5 e^{-sx+ry} + e^{x} \right) e^{-xy}.$$

RÉFÉRENCE

[1] M. A. Buhl, Nouveaux éléments d'analyse, tome I, deuxième édition, Paris 1944, p. 132—135.

Илија А. Шапкарев

ЗА ЛИНЕАРНИ ПАРЦИЈАЛНИ ДИФЕРЕНЦЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД КОИ СЕ ТРАНСФОРМИРААТ САМИ ВО СЕБЕ СО СМЕНА ОД ФУНКЦИЈАТА

Резиме

Се покажува дека парцијалната диференцијална равенка (9), со смената (4), се трансформира сама во себе. Нејзин партикуларен интеграл е (13), а потполниот интеграл, за $g = m$ ($m = const$), е (16).