# ПРИЛОГ КОН ПРОУЧУВАЊЕТО НА НЕКОИ СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАЕВИ НА ПРОБЛЕМОТ НА ЧЕТИРИ ТЕЛА

**Мадевски Живко**

Во [1] Брумберг, врз основа на работите на Андуаје, Мејер, Мак-Миллан и Бартки, Суботин и Мултон, ја иследува стабилноста на постојаните конфигурации во Проблемот на четири тела и дава решение на задачата во некои специјални случаеви.

Користејќи ја векторската анализа во работава ги испитуваме некои поспецијални случаеви на Проблемот на четири тела, што претставува интерес од методската страна во третирањето на проблемот.

Во 1. е обработен случајот кога констелацијата е рамностран тетраедар, додека во 2. специјалните рамнински случаеви на ромб, квадрат и кога трите маси се во темињата на еден рамностран триаголник а четвртата во неговиот центар.

Дадени се равенките на движението на масите во овие случаеви во однос на тежиштето на системата.

Во работава ќе ги обележуваме со:

$S$ — тежиштето на масите $m_1$, $m_2$, $m_3$ и $m_4$;
$S_i$ — тежиштето на масите $m_j$, $m_k$, $m_l$;
$\mathbf{r}_i$ — векторот на положение на масата $m_i$ спрема $S$;
$r_i^*$ — векторот на положение на $S_i$ спрема $S$;
$\mathbf{s}_{ik}$ — векторот на положение на масата $m_k$ спрема масата $m_i$;
$s_{ik}$ — растојание меѓу масите $m_i$ и $m_k$;
$\mathbf{P}_i$ — силата која дејствува на масата $m_i$ а која е резултат на привлекувањето ѝ од масите $m_j$, $m_k$, $m_l$ по законот на Њутн.

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4, \quad M_i = m_j + m_k + m_l.$$

Индексите $i$, $j$, $k$, $l$ имаат вредности 1, 2, 3, 4, и се меѓу себе различни.

Ако почетокот на координатната система се постави во тежиштето $S$ можат да се напишат овие релации:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + m_4 \mathbf{r}_4 = 0, \tag{0.1}$$

$$M_i \mathbf{r}_i^* = m_j \mathbf{r}_j + m_k \mathbf{r}_k + m_l \mathbf{r}_l, \tag{0.2}$$

од (0.1) и (0.2): $$M_i\, r_i^* + m_i\, \mathbf{r}_i = 0 \tag{0.3}$$

исто така $$-M\, \mathbf{r}_i = m_j\, \mathbf{s}_{ij} + m_k\, \mathbf{s}_{ik} + m_l\, \mathbf{s}_{il}. \tag{0.4}$$

1. Ако масите $m_i$ се наоѓаат во врвоите на еден рамностран тетраедар, тогаш

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{d\,t^2} = f \frac{m_i\, m_j}{s_{ij}^3}\, \mathbf{s}_{ij} + f \frac{m_i\, m_k}{s_{ik}^3}\, \mathbf{s}_{ik} + f \frac{m_i\, m_l}{s_{il}^3}\, \mathbf{s}_{il}, \tag{1.1}$$

или поради $s_{ij} = s_{ik} = s_{il} = s$ и (0.4)

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -f \frac{m_i\, M}{s^3}\, \mathbf{r}_i.$$

Од тука заклучуваме дека во случајот кога констелацијата на масите во Проблемот на четири тела е рамностран тетраедар правците на силите $\mathbf{P}_i$ се сечат во една точка, во тежиштето на системата.

Сега ќе покажеме дека и спротивно: ако правците на силите $\mathbf{P}_i$ се сечат во една точка, во тежиштето, констелацијата на масите е рамностран тетраедар.

Во тој случај силите можат да се напишат и вака:

$$\mathbf{P}_i = -\lambda_i\, \mathbf{r}_i,$$

каде $\lambda_i$ се позитивни скалари.

Ќе се обидеме да ги определиме скаларите $\lambda_i$.

Земе ли се в обзир познатата релација

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 = 0$$

може да се напише и

$$\lambda_1\, \mathbf{r}_1 + \lambda_2\, \mathbf{r}_2 + \lambda_3\, \mathbf{r}_3 + \lambda_4\, \mathbf{r}_4 = 0 \tag{1.2}$$

Ако релациите (0.1) и (1.2) се помножат векторски со $\mathbf{r}_4$ доаѓаме до

$$\begin{aligned} m_1\, [\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_4] + m_2\, [\mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_4] + m_3\, [\mathbf{r}_3,\ \mathbf{r}_4] &= 0 \\ \lambda_1\, [\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_4] + \lambda_2\, [\mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_4] + \lambda_3\, [\mathbf{r}_3,\ \mathbf{r}_4] &= 0; \end{aligned} \tag{1.3}$$

ако потоа (1.3) се помножат скаларно со $\mathbf{r}_3$ испаѓа дека

$$m_1\, (\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_4,\ \mathbf{r}_3) + m_2\, (\mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_4,\ \mathbf{r}_3) = 0$$

$$\lambda_1\, (\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_4,\ \mathbf{r}_3) + \lambda_2\, (\mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}_4,\ \mathbf{r}_3) = 0;$$

но поради тоа што $(\mathbf{r}_i,\ \mathbf{r}_j,\ \mathbf{r}_k) \neq 0$, бидејќи ја исклучуваме можноста за рамнинска констелација на масите, ја добиваме релацијата:

$$\frac{\lambda_1}{m_1} = \frac{\lambda_2}{m_2}.$$

Исто така ако равенките (1.3) се помножат скаларно со $\mathbf{r}_2$, односно со $\mathbf{r}_1$, се добива

$$\frac{\lambda_1}{m_1} = \frac{\lambda_3}{m_3} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_2}{m_2} = \frac{\lambda_3}{m_3}$$

На ист начин множејќи ги релациите (0.1) и (1.2) векторски со еден од векторите $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ или $\mathbf{r}_3$ излегува дека и односот $\lambda_4/m_4$ е еднаков со наведените односи, така да

$$\frac{\lambda_1}{m_1} = \frac{\lambda_2}{m_2} = \frac{\lambda_3}{m_3} = \frac{\lambda_4}{m_4} = k \text{ или } \lambda_i = k\, m_i,$$

каде $k$ е една позитивна скаларна величина.

Сега би можеле, ако се исползува (0.4), изразите за $\mathbf{P}_i$ да се доведат во облик

$$\mathbf{P}_i = \frac{k}{M}\, m_i\, m_j\, \mathbf{s}_{ij} + \frac{k}{M}\, m_i\, m_k\, \mathbf{s}_{ik} + \frac{k}{M}\, m_i\, m_l\, \mathbf{s}_{il}. \tag{1.4}$$

Ако се сравнат (0.4) и (1.4) добиваме:

$$\frac{f}{s_{12}^3} = \frac{f}{s_{13}^3} = \frac{f}{s_{14}^3} = \frac{f}{s_{23}^3} = \frac{f}{s_{24}^3} = \frac{f}{s_{34}^3} = \frac{k}{M},$$

односно $s_{12} = s_{13} = s_{14} = s_{23} = s_{24} = s_{34}$.

При просторната констелација на масите во Проблемот на четири тела правците на силите $\mathbf{P}_i$ се сечат во тежиштето на системата, ако и само ако таа констелација е равностран тетраедар.

Во овој случај секоја од масите при своето движение е подложена на дејството на една сила што е секогаш усмерена кон една неподвижна точка и која е пропорционална на соодветниот радис вектор. Уште ако иницијалните вектори на брзините се изберат така да се пропорционални на соодветните радиус вектори и се колинеарни со нив, констелацијата останува слична на своето иницијално положение и е стабилна за сето време на движението.

Конечните равенки на движенијата на масите можат да се добијат како што следува.

Од (0.4) со квадрирање се добива

$$M^2 r_i^2 = s^2 (m_j^2 + m_k^2 + m_l^2 + m_j m_k + m_j m_l + m_k m_l), \qquad r_i = |\mathbf{r}_i|,$$

или ако се замени во (1.1).

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -f \frac{m_i \gamma_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i,$$

каде е $\gamma_i = (m_j^2 + m_k^2 + m_l^2 + m_j m_k + m_j m_l + m_k m_l)^{3/2} | M^2$.

2. Во наредните специјални рамнински случаеви на Проблемот на четири тела ќе земеме дека иницијалните вектори на бзрините $\mathbf{v}_i$ совпаднуваат со рамнината на масите, големината им е пропорционална со $r_i$ и со соод-

ветните $\mathbf{r}_i$ зафаќаат еднакви агли; ќе покажеме дека во овие случаеви и $\mathbf{P}_i = -km_i\,\mathbf{r}_i$ $(k > o)$ со што би биле исполнети условите (на пример [2], стр. 344) да констелацијата на масите останува слична на своето иницијално положение и е стабилна за сето време на движението.

а) Ако масите се наоѓаат во темињата на еден ромб со еден внатрешен агол $\varphi$, тогаш $s_{12} = s_{23} = s_{34} = s_{41} = s$, $s_{24} = 2s \sin \varphi/_2$, $s_{13} = 2s \cos \varphi/_2$, земајќи уште и $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = m_4 = m'$, тежиштето $S$ на системата ќе совпадне со пресекот на дијагоналните на ромбот.

Силата $\mathbf{P}_1$ што дејствува на масата $m_1$ може да се напише

$$\mathbf{P}_1 = f m_1 \left( \frac{m_2}{s_{12}^3}\,\mathbf{s}_{12} + \frac{m_3}{s_{13}^3}\,\mathbf{s}_{13} + \frac{m_4}{s_{14}^3}\,\mathbf{s}_{14} \right);$$

или ако се земат в обзир наведените услови, уште и дека $\mathbf{s}_{12} + \mathbf{s}_{14} = \mathbf{s}_{13}$, односно $\mathbf{s}_{13} = -2\,\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{P}_1 = -f \frac{m\,(8m' \cos^3 \varphi/_2 + m)}{4\, s^3 \cos^3 \varphi/_2}\,\mathbf{r}_1.$$

На сличен начин доаѓаме до

$$\mathbf{P}_2 = -f \frac{m'\,(8m \sin^3 \varphi/_2 + m')}{4\, s^3 \sin^3 \varphi/_2}\,\mathbf{r}_2.$$

$$\mathbf{P}_3 = -f \frac{m\,(8m' \cos^3 \varphi/_2 + m)}{4\, s^3 \cos^3 \varphi/_2}\,\mathbf{r}_3,$$

$$\mathbf{P}_4 = -f \frac{m'\,(8m \sin^3 \varphi/_2 + m')}{4\, s^3 \sin^3 \varphi/_2}\,\mathbf{r}_4.$$

Значи $\mathbf{P}_i = -\lambda_i\,\mathbf{r}_i$, $\lambda_i > o$.

Веднаш се гледа дека $\lambda_1 = \lambda_3$ и $\lambda_2 = \lambda_4$,

односно $\dfrac{\lambda_1}{m} = \dfrac{\lambda_3}{m}$ и $\dfrac{\lambda_2}{m'} = \dfrac{\lambda_4}{m'}$.

Ако меѓу масите $m$ и $m'$ постои врската $\dfrac{m}{m'} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, односно

$$m' = \frac{8 \cos^3 \varphi/_2 - 1}{8 \sin^3 \varphi/_2 - 1} \cdot \frac{\sin^3 \varphi/_2}{\cos^3 \varphi/_2} \cdot m \tag{2.1}$$

може да се напише

$$\frac{\lambda_1}{m} = \frac{\lambda_2}{m'} = \frac{\lambda_3}{m} = \frac{\lambda_4}{m'} = k, \; k > o$$

и, конечно,

$$\mathbf{P}_i = -km_i\,\mathbf{r}_i.$$

Со оглед на природата на равенката (2.1), бидејќи коефициентот пред $m$ требе да е позитивен, следува $60^\circ < \varphi < 120^\circ$.

Ако констелацијата на масите во Проблемот на четири тела е ромб, чиишто внатрешни агли се меѓу $60^\circ$ и $120^\circ$, и ако меѓу масите постои таква врска да тие што се на спротивните темиња на ромбот се еднакви ($m_1 = m_3 = m$ и $m_2 = m_4 = m'$) и е во сила (2.1), со соодветни иницијални услови таа останува слична на иницијалното положение и е стабилна за сето време на движението.

Како е $r_1 = r_3 = s \cos \varphi/_2$ и $r_2 = r_4 = s \sin \varphi/_2$ можеме да ги напишеме равенките на движението:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_\alpha}{dt^2} = -f \frac{m}{4} \cdot \frac{8 \sin^3 \varphi - 1}{8 \sin^3 \varphi/_2 - 1} \cdot \frac{\mathbf{r}_\alpha}{r_\alpha^3}, \quad (\alpha = 1,3),$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_\beta}{dt^2} = -f \frac{m}{4} \cdot \frac{\sin^3 \varphi/_2}{\cos^3 \varphi/_2} \cdot \frac{8 \sin^3 \varphi - 1}{8 \sin^3 \varphi/_2 - 1} \cdot \frac{\mathbf{r}_\beta}{r_\beta^3}, \quad (\beta = 2,4).$$

б) Како посебен случај од а), за $\varphi = 90^\circ$, можеме да го третираме проблемот кога констелацијата на масите е квадрат.

Од (2.1) добиваме дека сега сите маси се еднакви меѓу себе.

Ако констелацијата на масите во Проблемот на четири тела е квадрат и ако сите маси се еднакви ($m_1 = m_2 = m_3 = m_4$), со соодветни иницијални услови таа останува слична на иницијалното положение и е стабилна за сето време на движението.

Равенките на движението на масите ќе бидат во тој случај:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -f \frac{m (2\sqrt{2} + 1)}{4} \cdot \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}.$$

в) Нека масите $m_1$, $m_2$ и $m_3$ се стационирани во темињата на еден рамностран триаголник а масата $m_4$ во неговиот центар, т. е. $s_{14} = s_{24} = s_{34} = s$, $s_{12} = s_{23} = s_{31} = s\sqrt{3}$.

Силите $\mathbf{P}_i$ што дејствуваат на секоја од тие маси, земајќи ја во предвид релацијата (0.4), можат да се напишат:

$$\mathbf{P}_1 = f \frac{m_1}{3\sqrt{3} s^3} \left( m_4 (3\sqrt{3} - 1) \mathbf{s}_{14} - M \mathbf{r}_1 \right),$$

$$\mathbf{P}_2 = f \frac{m_2}{3\sqrt{3} s^3} \left( m_4 (3\sqrt{3} - 1) \mathbf{s}_{24} - M \mathbf{r}_2 \right),$$

$$\mathbf{P}_3 = f \frac{m_3}{3\sqrt{3} s^3} \left( m_4 (3\sqrt{3} - 1) \mathbf{s}_{34} - M \mathbf{r}_3 \right),$$

$$\mathbf{P}_4 = f \frac{m_4 M}{s^3} \mathbf{r}_4.$$

За силите $\mathbf{P}_i$ да можат да се доведат во обликот $\mathbf{P}_i = -\lambda_i \mathbf{r}_i$ треба, $\mathbf{s}_{\alpha 4} = \mu_\alpha \mathbf{r}_\alpha$, $(\alpha = 1, 2, 3)$ од каде $\mathbf{r}_4 = (\mu_\alpha + 1) \mathbf{r}_\alpha$ и $\Rightarrow \mathbf{r}_4 = 0$.

Од тоа што тежиштето на системата $S$ и масата $m_4$ треба да се совпаднат (поради $\mathbf{r}_4 = 0$), и тоа во центарот на равностран триаголник следува дека $m_1 = m_2 = m_3$.

Во тој случај

$$\mathbf{P}_1 = -f \frac{m\,(m + \sqrt{3}\,m_4)}{s^3\sqrt{3}}\,\mathbf{r}_1,$$

$$\mathbf{P}_2 = -f \frac{m\,(m + \sqrt{3}\,m_4)}{s^3\sqrt{3}}\,\mathbf{r}_2,$$

$$\mathbf{P}_3 = -f \frac{m\,(m + \sqrt{3}\,m_4)}{s^3\sqrt{3}}\,\mathbf{r}_3,$$

$$\mathbf{P}_4 = 0,$$

каде $m = m_1 = m_2 = m_3$.

Очигледно дека $\mathbf{P}_i = -\,k m_i\,\mathbf{r}_i$.

Ако три еднакви маси се поставени во темињата на еден равностран триаголник, а четвртата, произволно голема, во неговиот центар, со соодветни инцијални услови таква констелација останува слична на иницијалното положение и е стабилна за сето време на движението.

Равенките на движението на масите ќе бидат:

$$\frac{d^2\,\mathbf{r}_i}{dt^2} = -f\frac{m + \sqrt{3}\,m_4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}, \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

$$\frac{d^2\,\mathbf{r}_4}{dt^2} = 0.$$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Брумберг, В. А.: Постоянные конфигурации в проблеме четырёх тел и их устойчивост, Астр. Журнал, Т 34, No 1, 1957

[2] Бонев, Н.: Теоретична астрономия, София, 1947.

Madevski Živko

## CONTRIBUTION A L'ETUDE DE CERTAINS CAS SPECIAUX DU PROBLEME DES 4 CORPS

R é s u m é

On étudie ici, par le méthode vectoriel, les cas speciaux du Problème des 4 corps: de tétraèdre équilatéral, de losange ($m_1 = m_3 = m$, $m_2 = m_4 = m'$ et (2.1)), de carré ($m_1 = m_2 = m_3 = m_4$) et de traingle équilatéral, les trois corps égaux aux sommets et le quatrième dans son centre.

On donne aussi les équations du mouvement dans ces cas-là.