ЕДНО ОБОПШТУВАЊЕ НА ЛЕМАТА НА ЖОРДАН И НЕКОИ НЕГОВИ ПРИМЕНИ

ДРАГАН ДИМИТРОВСКИ

I. УВОД

Познатото неравенство на Жордан [1]

$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

покрај многубројните примени, може да се ползува и за докажување на едно ново неравенство

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} \, dx < \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) \qquad (R > O) \tag{2}$$

кое носи исто име[1]). Со помошта на неравенството (2) на Жордан во Теоријата на аналитичните функции лесно се докажува таканаречената лема на Жордан, која што игра важна улога при пресметувањето на извесни класи определени интеграли[2]). Таа лема гласи ([2]):

1° Ако е $F(z)$ аналитична функција во горната полурамнина и по реалната оска, со исклучок на конечен број полови, од кои ниту еден не лежи на реалната оска;

(3) 2° ако $F(z) \longrightarrow 0$ униформно кога $z \longrightarrow \infty$ во горната полурамнина и по реалната оска;

3° ако е m реален позитивен параметар,

---

[1]) Еден елементарен доказ на неравенствата (1) и (2) може да се најде во книгата: Д. С. Митриновиќ: Зборник математичких проблема I, друго издање, Београд 1958, стр. 157, проблем бр. 150.

[2]) Особено разработана примена на неравенствата на Жордан и на неговата лема може да се најде во книгата: Д. С. Митриновиќ: Збоник математичких проблема III, во одделот „Комплексан интеграл и рачун остатака,., стр. 49 — 97.

тогаш

$$\int_C F_{(z)}\, e^{imz}\, dz \longrightarrow O,\ R \longrightarrow \infty;$$

каде што C е полукруг којшто лежи во горната полурамнина со центар во координантниот почеток и радиус R.

Оваа лема често се ползува при пресметувањето на определените на интеграли од облик

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} dx \tag{4}$$

преку примената на теоремата на Cauchy за сметањето со остатоците и примената на граничниот процес $R \longrightarrow \infty$. Во последниот израз функцијата $F(x)$ е таква $F(z)$ да ги има наброените особини 1° — 3°; во партикуларен случај $F(x)$ може да биде рационална функција.

II. ОБОПШТУВАЊЕ. Ние ќе ја обопштиме лемата на Жордан преку следната

ЛЕМА: 1° Ако е $F(z)$ аналитична функција од комплексна променлива z во обласла и на границите на областа

$$D: \qquad 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n},$$

со исклучок на конечен број сингуларитети кои сите се полови од кои ниеден не лежи на границите на областа;

2° $F(z)$ има особина

$$|F_{(z)}| < A R^{n-2},\ |z| = R \longrightarrow \infty,\ (A > 0,\ n = 1, 2, 3, \dots) \tag{5}$$

за секое θ од областа D;

3° ако $P_n(z)$ е полином од z со реални позитивни коефициенти,

тогаш

$$\int_G F_{(z)}\, e^{i P_n(z)}\, dz \longrightarrow 0,\ R \longrightarrow \infty;$$

каде G е лак од кругот $|z| = R$ определен со

$$0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

ДОКАЗ: Воведувајќи поларни координати, интегралот може да се напише во облик

$$\int_G F_{(z)} e^{iP_{n(z)}} dz = \int_0^{\frac{\pi}{n}} F(_{Re}{}^{i\theta}) e^{iP_{n(Re^{\theta i})}} Re^{\theta i} i d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{n}} F(_{Re}{}^{\theta i}) e^{i\sum\limits_{k=0}^{n} a_k R^k \cos k\theta} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k R^k \sin k\theta} Re^{i\theta} i d\theta.$$

Како е

$$\left| ie^{i\theta} e^{i\sum\limits_{k=0}^{n} a_k R^k \cos k\theta} \right| = 1,$$

ја имаме неедначноста

$$\left| \int_G F_{(z)} e^{iP_n(z)} dz \right| < \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left| F(_{Re}{}^{i\theta}) \right| e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k R^k \sin k\theta} R d\theta <$$

$$< R \cdot \underset{na\ G}{Max} \left| F(_{Re}{}^{i\theta}) \right| \int_0^{\frac{\pi}{n}} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k R^k \sin k\theta} d\theta .$$

Како е по услов

$$\underset{na\ G}{Max} \left| F(_{Re}{}^{i\theta}) \right| < A R^{n-2}, \ R \longrightarrow \infty , \ n = 1, \ 2, \ldots ;$$

потребно е да покажеме дека интегралот

$$\mathrm{I}_{(R)} = \int_0^{\frac{\pi}{n}} e^{-\sum a_k R^k \sin k\theta} d\theta$$

тежи кон нула со брзина поголема од таа на R^{-n+1} кога $R \longrightarrow \infty$.
Бидејќи броевите $\sin k\theta$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ се позитивни за секое θ меѓу 0 и $\frac{\pi}{n}$, и како броевите a_k се по услов позитивни, ја имаме следната мајоранта

$$\mathrm{I}_{(R)} < \int_0^{\frac{\pi}{n}} e^{-a_n R^n \sin n\theta} d\theta,$$

којашто ја добиваме отфрлувајќи ги сите членови од сумата, освен првиот. Воведувајќи во последниот интеграл замена $n\vartheta = \varphi$. добиваме

$$I_{(R)} < \frac{1}{n} \int_0^{\pi} e^{-a_n R^n \sin\varphi} \, d\varphi.$$

Како за интегралите од облик

$$\int_0^{\pi} f(\sin\varphi) \, d\varphi$$

важи равенството

$$\int_0^{\pi} f(\sin\varphi) \, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\varphi) \, d\varphi,$$

тоа ползувајќи го овој резултат добиваме

$$I_{(R)} < \frac{2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a_n R^n \sin\varphi} \, d\varphi$$

Ако на последниот интеграл ја примениме неравенката (2) на Жордан, добиваме

$$I_{(R)} < \frac{\Pi}{n a_n R^n} \left[1 - e^{-a_n R^n}\right].$$

Према тоа

$$\left| \int_G F_{(z)} \, e^{iP_{n(z)}} dz \right| < R \cdot \underset{na\ G}{M_{ax}} \left| F(Re^{i\theta}) \right| \cdot \frac{\pi}{n \, a_n R^n} \left[1 - e^{-a_n R^n}\right] <$$

$$< \frac{A\pi}{n a_n R} \left[1 - e^{-a_n R^n}\right] \longrightarrow O, \ R \longrightarrow \infty \ ;$$

што ја докажува лемата.

III. ПРИМЕНА. Лемата на Жордан (3) е очевидно содржана во нашата лема, бидејќи за $n = 1$

$$\left| F_{(z)} \right| < \frac{A}{R} \longrightarrow O, \ R \longrightarrow \infty$$

$$\text{и} \quad e^{iPn\,(z)} \equiv e^{imz}, \ m > O \ ;$$

додека контурата е

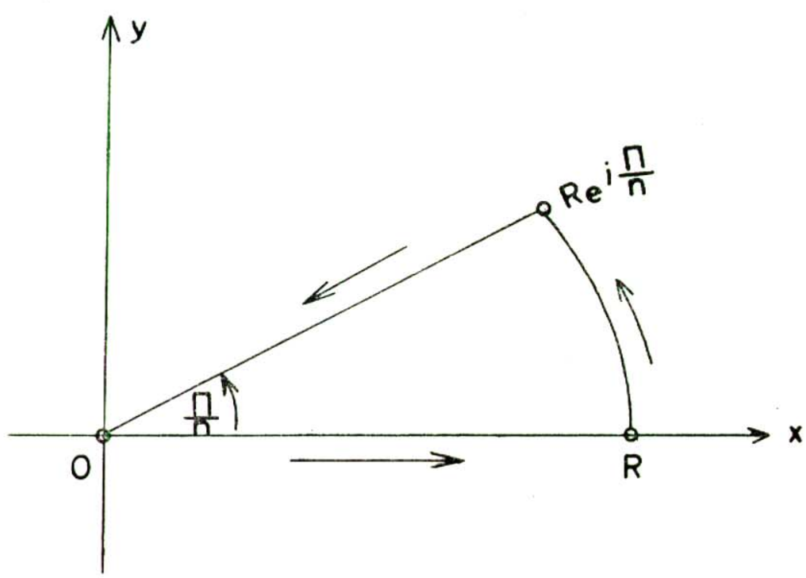
$$o \leqslant \arg z \leqslant \pi ,$$

што и беа условите на лемата на Жордан. Меѓутоа, обратното не важи, како што ќе биде појаснето во примерот 6.

Докажаната лема може да се исползува многу широко при пресметувањето на нови класи опеделени интеграли од тип $\int_0^{\infty}$, или пак за обопштување на досега познатите случаи решливи по оваа метода и регистрирани во таблиците [3]. Избирајќи произволни функции $P_n(z)$ и $F(z)$ коишто ги задоволуваат условите $1^\circ - 3^\circ$ на воопштената лема и применувајќи ја теоремата на Cauchy за остатоците, како и докажаната лема, врху линискиот интеграл

$$\int_C F_{(z)} e^{\,iP_n(z)} dz$$

каде C е контура од сликата



добиваме, по изведениот граничен процес $R \longrightarrow \infty$ овој резултат

$$(6) \qquad \int_0^{+\infty}\left[F_{(x)} e^{\,iP_{n(x)}} - F(e^{\frac{\pi}{n}i}x)\, e^{\,iP_n(e^{\frac{\pi}{n}i}x)}\, e^{\frac{\pi}{n}i}\right] dx = 2\pi_i \Sigma B,$$

кадешто ΣB е збир на остатоците на функцијата $F_{(z)}\, e^{\,iP(z)}$ за оние полови кои се во контурата.

Условите на лемата (5) можат да се изменат во смисол на регуларноста. Зарад својата специфична положба на контурата на интеграцијата, точката $z=0$ воопште не мора да биде регуларна за подинтегралната функцијата. Точката $z=0$ може да биде пол или дури есенцијален сингуларитет (напр. логаритамска точка), но под услов интегалот

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{0} F(re^{i\theta})\, e^{iP_n(re^{\theta i})}\, re^{\theta i}\, i\, d\theta$$

земен по делот од кружната линија L којашто го заградува сингуларитетот $z=0$ од внатрешноста на контурата C

$$L: |z|=r,\ O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n},\ \ r<R;$$

да има определена и конечна гранична вредност кога $r \longrightarrow 0$.

Особено прост станува случајот кога координатниот почеток е пол од I ред за функцијата $F(z)$. Тогаш подинтегралната функција во околината на полот $z=0$ може да се развие во Лоранов — ред:

$$F_{(z)}\, e^{iP_{n(z)}} = \frac{Bo}{z} + A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots$$

Интегрирајќи го редот по делот L на контурата C добиваме

$$\int_L F_{(z)}\, e^{iP_{n(z)}}\, dz = B_O \int_{\pi/n}^{O} \frac{re^{i\theta}i\, d\theta}{re^{i\theta}} + \sum_{k=O}^{\infty} A_k r^{k+1} i \int_{\pi/n}^{O} e^{(k+1)i\theta}\, d\theta$$

Бидејќи се сите интеграли во сумата на десната страна конечни, тоа во случајот на граничниот процес кога $r \longrightarrow 0$ добиваме

$$\lim_{r\to o} \int_L F(z)\, e^{iP_n(z)}\, dz = -\frac{B_o \pi i}{n},$$

каде B_o изнесува

$$B_o = \operatorname*{Res}_{z=o} \left\{ F_{(z)}\, e^{iP_{n(z)}} \right\}.$$

Така во случајот кога $z=0$ е пол од прв ред го добиваме резултатот

$$\int_O^{+\infty} \left[F_{(x)}\, e^{iP_n(x)} - F\left(e^{\frac{\pi}{n}ix}\right) e^{iP_n\left(e^{\frac{\pi}{n}ix}\right)} e^{\frac{\pi}{n}i} \right] dx = 2\pi i\, \Sigma B + \frac{B_o \pi i}{n} \tag{7}$$

каде B_o ја има назначената вредност.

Последните формули (6) и (7) можат многу полезно да се употебат за пресметнување на нови класи определени интеграли ,коишто претставуваат разни поопштувања на некои класи интеграли регистрирани во [3]. Оваа метода на пресметување на определените несвојствени интегали од тип $\int_0^{+\infty}$ има таа предност што преку неа се пресметуваат интеграли кои можат да содржат многу параметри. Варирајќи ги тие параметри во позволените граници можат да се пресметаат многу различни определени интеграли ако само еднаш сме ги пресметале остатоците.

Може да се покаже дека функциите од облик

$$F(z) = \frac{R_l(z)}{Q_m(z)} z^{\lambda} e^{iae^{ibz}} \tag{8}$$

каде $R_l(z)$ и $Q_m(z)$ се полиноми од степени респективно l i m, за кои важи $l+1 < m$, $Q_m(z)$ нема реални нули ниту нули по зракот $\arg z = \frac{\pi}{n}$, каде λ е реален параметар подложен на условите

$$-1 < \lambda < m - (l+1)$$

и каде a и b се произволни реални ненегативни параметри, ги задоволуваат условите на лемата (5). Према тоа функцијата

$$f(z) = \frac{R_l(z)}{Q_m(z)} z^{\lambda} e^{iae^{ibz}} e^{iP_n(z)} \tag{9}$$

може многу полезно да се употреби за пресметување на нови класи определени интеграли.

IV. ПРИМЕРИ.

1- Функциите

$$F_{(z)} = e^{-bz} \frac{c+dz^4}{z(m^4+n^4z^4)}, \quad P_2(z) = az^2 + bz$$

чии параметри се подложени на условите

$$a > O, b \geqslant O, \ m > O, \ n \geqslant O; \ c, d \text{ произволни;}$$

ги задоволуваат условите на лемата (5) по контурата

$$O < r \leqslant |z| \leqslant R, \ O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

По пресметувањето на остатокот, од (7) се добива следниот определен интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}\sin(ax^2+bx)}{x} \frac{c+dx^4}{m^4+n^4x^4} dx = \frac{\pi}{4m^4}\left[c - \frac{cn^4-dm^4}{n^4} e^{-\frac{am^2}{n^2} - b\sqrt{2}\frac{m}{n}}\right].$$

Како подинтегралната функција содржи 6 параметра, тоа со варирање на тие параметри можат да се добијат различни интересни несвојствени интеграли, на пр.

1°. $c=d\ m=n;$ $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}\sin(ax^2+bx)}{x}\,dx=\frac{\pi}{4};$$

2°. $b=O,\ m^4=n^4=d=-c;$

$$\int_0^{+\infty} \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\,\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi\left[\frac{1}{2}-e^{-a}\right];$$

3°. $a=O,\ d=-c,\ m^4=n^4;$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-x^4}{1+x^4}\,\frac{e^{-bx}\sin bx}{x}\,dx=\frac{\pi}{4}\left[1-2\,e^{-b\sqrt{2}}\right];$$

4°. $a=O,\ d=O,\ m^4=n^4;$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}\sin bx}{x}\,\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{4}\left[1-e^{-b\sqrt{2}}\right]$$

5°. $C=O,\ m^4=n^4;$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}\,e^{-x}\sin(ax^2+bx)\,dx=\frac{\pi}{4}e^{-a-b\sqrt{2}}$$

6°. $c=o,\ n\longrightarrow o$

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-bx}\sin(ax^2+bx)\,dx=O.$$

2. Функциите

$$F(z)=\frac{z^\lambda}{z^2+a^2},\quad P_1(z)=z$$

ги задоволуваат условите на лемата (5) по контурата

$$z=Re^{\theta i},\ z=re^{\theta i},\ O\leqslant\theta\leqslant\pi,\ O<r<a<R;$$
$$-R\leqslant x\leqslant -r,\ \text{и}\ r\leqslant x\leqslant R.$$

Се добиваат следните определени интеграли

$$\int_{o}^{+\infty} \frac{x^{\lambda}[\cos x + \cos(\lambda\pi - x)]}{x^2 + a^2}\, dx = \pi a^{\lambda-1} e^{-a} \cos\frac{\lambda\pi}{2}\ ;$$

$$\int_{o}^{+\infty} \frac{x^{\lambda}[\sin x + \sin(\lambda\pi - x)]}{x^2 + a^2}\, dx = \pi a^{\lambda-1} e^{-a} \sin\frac{\lambda\pi}{2}\ ;$$

$$-1 < \lambda < 2,\ a > O.$$

чии специјални случаи се:

$$\lambda = -\frac{1}{2}\ ; \quad \int_{o}^{+\infty} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{x}\ (x^2+a^2)}\, dx = \frac{\pi e^{-a}}{a\sqrt{2a}};$$

$$\lambda = O\ ; \quad \int_{o}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a};$$

$$\lambda = 1; \quad \int_{o}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

3. **Функциите**

$$F(z) = e^{-\sqrt{3}\, Bz},\quad P_3(z) = Az^3 + Bz,\ A > O,\ B \geqslant O;$$

ги задоволуваат условите на лемата (5) по контурата

$$o \leqslant Re\{z\} \leqslant R,\ |z| = R,\ o \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{3},\ z = xe^{\frac{\pi i}{3}},\ O \leqslant x \leqslant R;$$

се добива следниот определен интеграл

$$\int_{o}^{+\infty} e^{-\sqrt{3}Bx} \cos\left(Ax^3 + Bx + \frac{\pi}{3}\right) dx = O.$$

4. **Со интеграција на функциите**

$$e^{-Bz^2}\, e^{i(Az^4 + Bz^2)}\ ;\ \frac{e^{-Bz^2}}{1+z^8}\, e^{i(Az^4 + Bz^2)}$$

по контурата

$$O \leqslant R_e\{z\} \leqslant R,\ |z| = R,\ O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4};\ z = xe^{\frac{\pi i}{4}},\ O \leqslant x \leqslant R$$

добиваме респективно

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-Bx^2} \sin\left(Ax^4 + Bx^2 + \frac{\pi}{4} \right) dx = O;$$

и $$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-Bx^2}}{1+x^8} \sin (Ax^4 + Bx^2 - \varphi_0)\, dx = -\frac{\pi e^{-\frac{A-B}{\sqrt{2}}}}{8}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{2} - 1).$$

5. Многубројни примери во врска со примената на обопштената лема на Жордан на пресметувањето на определените интеграли се дадени во [4].

6. Функцијата $e^{-z} \cdot e^{iz^3}$ ги задоволува условите на лемата (5) за $O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{3}$, т. е.

$$\int_{G} e^{-z} \cdot e^{iz^3}\, dz \longrightarrow O, \quad z \longrightarrow \infty .$$

Ако се опитаме да го сведеме овој интеграл на тип (3), т. е. ако воведеме трасформација

$$W = z^3$$

тогаш областа D се пресликува во областа

$$O \leqslant \arg W \leqslant \pi$$

и интегралот станува

$$\int_{S} \frac{e^{-\sqrt[3]{w}}}{3\sqrt[3]{w^2}}\, e^{iw}\, dw$$

каде S е полукругот $|W| = R$, $O \leqslant \arg W \leqslant \pi$.

Но сега подинтегралната функција не ги исполнува условите (3) на лемата на Жордан, оти не е секаде ограничена (напр. по негативниот дел од X-оската), а на самата оска има и еден алгебарски сингуларитет. Тоа значи дека сите функции што ги задоволуваат условите (3) ги задоволуваат условите (5) но не сите функции со особини (5) се функции со особини (3). Докажаната генерализација е едно проширување на Жордановите аналитички функции.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Д. С. Митриновић: Важније неједнакости, Математичка библиотека 7, Београд 1958, стр. 50.

[2] В. И. Смирнов: Курс висшей математики, т. III, част II, издание седэмое, Москва 1958, п. 224.

[3] W. Gröbner und N. Hofreiter: Integraltafel, II teil, Bestimmte Integrale, Wien, 1961, dritte, verbesserte Auflage.

[4] Д. Димитровски: Примена рачуна остатака на израчунавање неких несвојствених интеграла, Изабрана поглавља из математике II, Математичка библиотека, књ. 22, стр. 61 — 70.

Dragan Dimitrovski

UNE GENERALISATION DU LEMME DE JORDAN ET SES APPLICATIONS

Résumé

L' auteur démontre le lemme suivant:

1° Soit F (z) une function analytique de la variable complexe z au contour et dans le domaine D donné par

$$O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n},$$

éxepté un nombre fini des pôles qui ne se trouvent pas au contour.

2° La fonction F (z) possède la popriété

$$|F(z)| < AR^{n-2}, \; |z| = R \longrightarrow \infty$$
$$(A > O, \; n = 1, 2, \ldots).$$

3° Soit $P_n(z)$ un polynome de la variable complexe z qui a des coéficients réels positifs;

alors, avec $R \longrightarrow \infty$, on a

$$\int_G F(z) e^{iP_n(z)} dz \longrightarrow O,$$

où G présente un arc du cercle $|z| = R$, $O \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{n}$.

En utilisant le théoreme de Cauchy des résidus, le lemme démontré et le contour cité sur les fonctions du type (8), on peut évaluer un grand nombre des intègrales, non régistrées dans les tables.