Математички Билтен
26 (LII)
2002 (61–74)
Скопје, Македонија

ISSN 0351-336X

ИНТЕГРАЛЕН ОБЛИК НА ЕДЕН k-ЛИНЕАРЕН ФУНКЦИОНАЛ

Алекса Малчески

Абстракт

Во сите работи од 2-нормирани простори и 2-полуnорми под 2-линеарен функционал се подразбира билинеарен функционал. Природно обопштување на билинеарниот функционал е k-линеарниот функционал. Во оваа работа воведуваме нов вид на k-линеарен функционал (2-линеарен функционал) и во случај кога векторскиот простор е конечно-димензионален ќе дадеме негова карактеризација. Воведената класа k-линеарни функционали всушност е поткласа од класата која во литературата го носи ова име.

Во [1] S. Gahler го воведува поимот за 2-нормиран простор, а во [4] е докажана еквивалентноста на оваа дефиниција со следната дефиниција, која овде ќе ја користиме.

Дефиниција 1. Нека X е векторски простор над полето реални броеви и $\dim X > 1$. Функцијата $\|\cdot,\cdot\|\colon \to R$ која ги задоволува условите:

($P1$) Ако $\|x,y\| = 0$, тогаш множеството вектори $\{x,y\}$ е линеарно зависно.

($P2$) $\|A(x,y)^T\| = |\det A| \cdot \|x,y\|$, за секои $x,y \in X$ и $A \in M_2(\mathbf{R})$.

($P3$) $\|x+x',y\| \leq \|x,y\| + \|x',y\|$, за секој $x',x,y \in X$.

ја нарекуваме 2-норма на векторскиот простор X, а подредениот пар $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ го нарекуваме 2-нормиран простор.

1. 2-линеарен функционал

Дефиниција 2. Пресликување $\Lambda: X \times X \to \Phi$ кое ги исполнува условите

$$\Lambda(x+x', y) = \Lambda(x,y) + \Lambda(x',y)$$

$$\Lambda\left(A(x,y)^T\right) = (\det A)\Lambda(x,y)$$

за секои $x, x', y \in X$ и за секоја $A \in M_2(\Phi)$, го нарекуваме 2-линеарен функционал на X^2.

Оваа дефиниција се разликува од досегашните дефиниции на 2-линеарни функционали на векторски простор X^2 над полето на реални броеви $\mathbf{R}$. Во сите досегашни статии се разгледуваат билинеарни функционали на множеството $X \times X$. 2-линеарните функционали се различен вид на пресликувања во однос на билинеарните пресликувања, и тие се најблиска аналогија до обичните линеарни пресликувања. Основни својства кое ги имаат 2-линеарните функционали, а го немаат билинеарните функционали се следните две својства.

Лема 1. Ако $\Lambda: X \times X \to \mathbf{R}$ е 2-линеарен функционал и $\{x,y\}$ е линеарно зависно множество, тогаш $\Lambda(x,y) = 0$.

Доказ. Бидејќи множеството $\{x,y\}$ е линеарно зависно, точно е едно од равенствата $x = \alpha y$ или $y = \beta x$. Ако е исполнето првото равенство, тогаш

$$\Lambda(x,y) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}(y,y)^T\right) = \det\left(\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\Lambda(y.y) = 0\Lambda(y,y) = 0,$$

а ако е исполнето второто равенство, тогаш

$$\Lambda(x,y) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta & 0\end{bmatrix}(x,x)^T\right) = \det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta & 0\end{bmatrix}\right)\Lambda(x,x) = 0\Lambda(x,x) = 0. \quad \square$$

Според тоа за кој било 2-линеарен функционал $\Lambda: X \times X \to \mathbf{R}$, $\Lambda_{|\Delta_2} = 0$, каде Δ_2 е множеството од сите подредени парови (x,y), каде $\{x,y\}$ е линеарно зависно множество.

Лема 2. Ако $\Lambda: X \times X \to \Phi$ е 2-линеарен функционал, тогаш $\Lambda(x,y) = -\Lambda(y,x)$, за секои $x, y \in X$.

Доказ. За секои $x, y \in X$, од дефиницијата на 2-линеарен функционал имаме

$$\Lambda(x,y) = \Lambda\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}(y,x)^T\right) = \det\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\Lambda(y,x) = -\Lambda(y,x). \quad \square$$

Забелешка. За билинеарен функционал $L: X \times X \to \mathbf{R}$ не мора да се исполнети претходните својства. На пример, нека го разгледаме векторскиот простор $X = C_{[0,1]}$ и на $X \times X = C_{[0,1]} \times C_{[0,1]}$ го разгледуваме пресликувањето

$$L(f,g) = \int_0^1 K(x)f(x)g(x)dx$$

каде што $y = K(x)$ е непрекината, ненулта, ненегативна функција на $[0,1]$. За вака дефинираното пресликување важи

$$L(f+h,g) = L(f,g) + L(h,g), L(f,g+h) = L(f,g) + L(f,h) \quad \text{и}$$
$$L(\alpha f, \beta g) = \alpha\beta L(f,g)$$

што значи дека L е билинеарен функционал.

За $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ од непрекинатоста, ненегативноста и тоа што K е ненулта функција следува

$$L(f,g) = \int_0^1 K(x)f(x)g(x)dx = 2\int_0^1 K(x)x^4dx > 0.$$

Според тоа, $g = 2f$, т.е. множеството $\{f,g\}$ е линеарно зависно, а $L(f,g) > 0$.

Лема 3. Ако $\Lambda: X \times X \to \Phi$ е 2-линеарен функционал, тогаш

$$\Lambda(x, y, +z) = \Lambda(x,y) + \Lambda(x,z).$$

Доказ. Од дефиницијата на 2-линеарен функционал следува

$$\begin{aligned}
\Lambda(x, y+z) &= \Lambda\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}(y+z,x)\right) = \det\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\Lambda(y+z,x) = \\
&= -[\Lambda(y,x) + \Lambda(z,x)] = -\Lambda(z,x) - \Lambda(z,x) = \\
&= \det\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\Lambda(y,x) + \det\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\Lambda(z,x) = \\
&= \Lambda\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}(y,x)^T\right) + \Lambda\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}(z,x)^T\right) = \\
&= \Lambda(x,y) + \Lambda(x,z)
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. □

Лема 4. Ако $\Lambda: X \to \Phi$ е билинеарен функционал за кој $\Lambda(x,y) = -\Lambda(x,y)$, тогаш Λ е 2-линеарен функционал.

Доказ. Ако $x \in X$, тогаш $\Lambda(x,x) = -\Lambda(x,x) = 0$ т.е. $2\Lambda(x,x) = 0$. Значи, $\Lambda(x,x) = 0$.

Ако $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\Phi)$ и $x, y \in X$ тогаш

$$\begin{aligned}
&\Lambda\left(A(x,y)^T\right) = \\
&= \Lambda(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y) = \\
&= \Lambda(a_{11}x, a_{21}x) + \Lambda(a_{11}x, a_{22}y) + \Lambda(a_{12}y, a_{21}x) + \Lambda(a_{12}y, a_{22}y) = \\
&= a_{11}a_{21}\Lambda(x,x) + a_{11}a_{22}\Lambda(x,y) + a_{12}a_{21}\Lambda(y,x) + a_{12}a_{22}\Lambda(y,y) = \\
&= a_{11}a_{21} \cdot 0 + a_{11}a_{22}\Lambda(x,y) - a_{12}a_{21}\Lambda(x,y) + a_{12}a_{22} \cdot 0 = \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}xa_{21})\Lambda(x,y) = \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Lambda(x,y) = (\det A)\Lambda(x,y),
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. □

Лема 5. Секој 2-линеарен функционал е билинеарен функционал.

Доказ. Доволно е да се докаже дека $\Lambda(\alpha x, y) = \alpha\Lambda(x,y)$. Навистина

$$\Lambda(\alpha x, y) = \Lambda\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(x,y)^T\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\Lambda(x,y) = \alpha\Lambda(x,y). \ \square$$

Со тоа е покажано дека множеството од 2-линеарни функционали е поткласа од класта билинеарни функционали.

Дефиниција 3. Нека X е 2-нормиран простор. За 2-линеарниот функционал $\Lambda : X \times X \to \Phi$ велиме дека е ограничен 2-линеарен функционал ако постои константа M, таква што $|\Lambda(x,y)| \leq M\|x,y\|$.

Аналогно се дефинира ограничен билинеарен функционал.

Лема 6. Ако X е 2-нормиран простор, $\Lambda : X \times X \to \Phi$ е ограничен билинеарен функционал и $\|\cdot,\cdot\| : X \times X \to \mathbf{R}$ е 2-норма на 2-векторскиот простор $X \times X$, тогаш за произволно линеарно зависно множество $\{x,y\}$, $\Lambda(x,y) = 0$.

Доказ. Бидејќи Λ е ограничен билинеарен функционал имаме

$$|\Lambda(x,y)| \leq K\|x,y\|$$

за кои било $x, y \in X$. Ако множеството $\{x,y\}$ е линеарно зависно, тогаш

$$0 \leq |\Lambda(x,y)| \leq K\|x,y\| = K \cdot 0 = 0, \quad \text{т.е.} \quad \Lambda(x,y) = 0. \quad \square$$

2. k-линеарен функционал над конечно димензионален векторски простор

Аналогно на поимот 2-линеарен функционал се дефинира k-линеарен функционал.

Дефиниција 4. Пресликување $\Lambda: X^k \to \Phi$ кое ги исполнува условите

$$\Lambda(x+x', y_1, \ldots, y_{k-1}) = \Lambda(x, y_1, \ldots, y_{k-1}) + \Lambda(x', y_1, \ldots, y_{k-1})$$
$$\Lambda\left(A(x, y_1, \ldots, y_{k-1})^T\right) = (\det A)\Lambda(x, y_1, \ldots, y_{k-1})$$

за секои $x, x', y_1, \ldots, y_{k-1} \in X$ и за секоја $A \in M_k(\Phi)$, го нарекуваме k-линеарен функционал на X^k.

Во овој дел кога X е конечнодимензионален простор со $\dim X = n$ ќе дадеме карактеризација на k-линеарен функционал, за $k < n$.

Нека $L_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ е дадено множество и нека $k < n$ е природен број. На множеството L_n^k ја разгледуваме фамилијата од сите едноелементни подмножества, односно формираме σ-алгебра од множества $P(L_n^k)$, каде $P(L_n^k)$ е партитивното множество на L_n^k. Нека $\mu: P(L_n^k) \to R$ е пресликување за кое

$$\mu\left(i_{\pi(1)}, i_{\pi(2)}, \ldots, i_{\pi(k)}\right) = (-1)^{I(\pi)} \mu(i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

каде

$$I(\pi) = \begin{cases} 1, & \pi \text{ е парна пермутација} \\ -1, & \pi \text{ е непарна пермутација} \end{cases}$$

и ако $i_s = i_t$ за некои $s \neq t$, $s, t = 1, 2, \ldots, k$ тогаш $\mu(i_1, i_2, \ldots, i_k) = 0$. Бидејќи се работи за конечно множество даденото пресликување μ е конечна борелова мера. За произволна k-торка пресликувања $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$, каде $f_i: L_n \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ определуваме

$$\int_{L_n^k} (f_1, f_2, \ldots, f_k) d\mu = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in L_n^k} f_1(i_1) f_2(i_2) \ldots f_k(i_k) \mu(i_1, \ldots, i_k).$$

Бидејќи функцијата μ е добро дефинирана и $f_1, f_2, \ldots, f_k$ се добро дефинирани, заради конечноста на сумата десната страна е добро дефинирана. Според тоа последниот интеграл е добро дефиниран.

Ќе покажеме дека вака определеното пресликување е k-линеарен функционал т.е. пресликувањето

$$\Lambda(f_1, f_2, \ldots, f_k) = \int\limits_{L_n^k} (f_1, f_2, \ldots, f_k) d\mu$$

е k-линеарен функционал.

За таа цел на почеток ќе направиме друг запис на дефинираниот интеграл. Бидејќи $\mu(i_1, i_2, \ldots, i_k) = 0$ ако $i_s = i_t$ за некои $s \neq t$, $s, t, = 1, 2, \ldots, k$, зададениот збир ќе го запишеме на следниот начин:

$$\int\limits_{L_n^k} (f_1, f_2, \ldots, f_k) d\mu = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in L_n^k} f_1(i_1) f_2(i_2) \ldots f_k(i_k) \mu(i_1, \ldots, i_k) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k \in L_n^k}}^{n} \sum_{\pi \in S_k} f_1(i_{\pi(1)}, i_{\pi(2)}, \ldots, i_{\pi(k)}) \mu(i_{\pi(1)}, i_{\pi(2)}, \ldots, i_{\pi(k)}) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}}^{n} \sum_{\pi \in S_k} f_1(i_{\pi(1)}) f_2(i_{\pi(2)}) \ldots, f_k(i_{\pi(k)}) \mu(i_{\pi(1)}, \ldots, i_{\pi(k)}) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}}^{n} \sum_{\pi \in S_k} f_1(i_{\pi(1)}) f_2(i_{\pi(2)}) \ldots f_k(i_{\pi(k)}) (-1)^{I(\pi)} \mu(i_1, \ldots, i_k) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}}^{n} \left(\sum_{\pi \in S_k} f_1(i_{\pi(1)}) f_2(i_{\pi(2)}) \ldots f_k(i_{\pi(k)}) (-1)^{I(\pi)} \right) \mu(i_1, \ldots, i_k) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}}^{n} \left(\sum_{\pi \in S_k} (-1)^{I(\pi)} f_1(i_{\pi(1)}) f_2(i_{\pi(2)}) \ldots f_k(i_{\pi(k)}) \right) \mu(i_1, \ldots, i_k) || =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}}^{n} \begin{vmatrix} f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3) & \ldots & f_1(i_k) \\ f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \ldots & f_2(i_k) \\ f_3(i_1) & f_3(i_2) & f_3(i_3) & \ldots & f_3(i_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \ldots & f_k(i_k) \end{vmatrix} \mu(i_1, \ldots, i_k)$$

односно

$$\int\limits_{L_n^k} (f_1, f_2, \ldots, f_k) d\mu =$$

$$= \sum_{\substack{i_1<i_2<\dots<i_k \\ i_1,i_2,\dots,i_k=1}}^{n} \begin{vmatrix} f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3) & \dots & f_1(i_k) \\ f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \dots & f_2(i_k) \\ f_3(i_1) & f_3(i_2) & f_3(i_3) & \dots & f_3(i_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \dots & f_k(i_k) \end{vmatrix} \mu(i_1,\dots,i_k).$$

Ако определиме $\Lambda(f_1, f_2, \dots, f_k) = \int\limits_{L_n^k} (f_1, f_2, \dots, f_k) d\mu$, тогаш

$$\Lambda(f_1, f_2, \dots, f_k) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1<i_2<\dots<i_k \\ i_1,i_2,\dots,i_k=1}}^{n} \begin{vmatrix} f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3) & \dots & f_1(i_k) \\ f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \dots & f_2(i_k) \\ f_3(i_1) & f_3(i_2) & f_3(i_3) & \dots & f_3(i_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \dots & f_k(i_k) \end{vmatrix} \mu(i_1,\dots,i_k).$$

Од овој запис непосредно следуваат особините на вака дефинираниот интеграл, т.е. особините на определеното пресликување Λ.

1. $\Lambda(f_1, \dots f_{i-1}, f_i + f_i', f_{i+1}, \dots, f_k) =$
   $= \Lambda(f_1, \dots f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots, f_k) + \Lambda(f_1, \dots, f_{i-1}, \dots, f_k)$
2. $\Lambda\left(A(f_1, f_2, \dots, f_k)^T\right) = (\det A)\Lambda(f_1, f_2, \dots, f_k)$ за секои $f_1, f_2, \dots, f_k \colon L_n \to \mathbf{R}$ и за секоја $A \in M_k(\mathbf{R})$.

За првото својство, од особините на детерминанти имаме

$$\int\limits_{L_n^k} (f_1, f_2, \dots f_{i-1}, f_i + f_i', f_{i+1}, \dots, f_k) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1<i_2<\dots<i_k \\ i_1,i_2,\dots,i_k=1}} \begin{vmatrix} f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3) & \dots & f_1(i_k) \\ f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \dots & f_2(i_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i-1}(i_1) & f_{i-1}(i_2) & f_{i-1}(i_3) & \dots & f_{i-1}(i_k) \\ f_i(i_1)+f_2'(i_1) & f_i(i_2)+f_i(i_2) & f_i(i_3)+f_i'(i_3) & \dots & f_i(i_k)+f_i'(i_k) \\ f_{i+1}(i_1) & f_{i+1}(i_2) & f_{i+1}(i_3) & \dots & f_{i+1}(i_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \dots & f_k(i_k) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \mu(i_1,\dots,i_k) =$$

$$
= \sum_{\substack{i_1<i_2<\dots<i_k\\ i_1,i_2,\dots,i_k=1}}^{n} \left(\begin{vmatrix}
f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3 & \dots & f_1(i_k) \\
f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \dots & f_1(i_k 1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_{i-1}(i_1) & f_{i-1}(i_2) & f_{i-1}(i_3) & \dots & f_{i-1}(i_k) \\
f_i(i_1) & f_i(i_2) & f_i(i_3) & \dots & f_i(i_k) \\
f_{i+1}(i_1) & f_{i+1}(i_2) & f_{i+1}(i_3) & \dots & f_{i+1}(i_k) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \dots & f_k(i_k)
\end{vmatrix} + \right.
$$

$$
\left. + \begin{vmatrix}
f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3) & \dots & f_1(i_k) \\
f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \dots & f_1(i_k 1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_{i-1}(i_1) & f_{i-1}(i_2) & f_{i-1}(i_3) & \dots & f_{i-1}(i_k) \\
f_i(i_1) & f_i(i_2) & f_i(i_3) & \dots & f_i(i_k) \\
f_{i+1}(i_1) & f_{i+1}(i_2) & f_{i+1}(i_3) & \dots & f_{i+1}(i_k) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \dots & f_k(i_k)
\end{vmatrix} \right) \times
$$

$$
\times\ \mu(i_1,\dots,i_k) =
$$

$$
= \sum_{\substack{i_1<i_2<\dots<i_k\\ i_1,i_2,\dots,i_k=1}}^{n} \begin{vmatrix}
f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3 & \dots & f_1(i_k) \\
f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \dots & f_1(i_k 1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_{i-1}(i_1) & f_{i-1}(i_2) & f_{i-1}(i_3) & \dots & f_{i-1}(i_k) \\
f_i(i_1) & f_i(i_2) & f_i(i_3) & \dots & f_i(i_k) \\
f_{i+1}(i_1) & f_{i+1}(i_2) & f_{i+1}(i_3) & \dots & f_{i+1}(i_k) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \dots & f_k(i_k)
\end{vmatrix} \times
$$

$$
\times\ \mu(i_1,\dots,i_k) +
$$

$$
+ \sum_{\substack{i_1<i_2<\dots<i_k\\ i_1,i_2,\dots,i_k=1}}^{n} \begin{vmatrix}
f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3 & \dots & f_1(i_k) \\
f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \dots & f_1(i_k 1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_{i-1}(i_1) & f_{i-1}(i_2) & f_{i-1}(i_3) & \dots & f_{i-1}(i_k) \\
f_i'(i_1) & f_i'(i_2) & f_i'(i_3) & \dots & f_i'(i_k) \\
f_{i+1}(i_1) & f_{i+1}(i_2) & f_{i+1}(i_3) & \dots & f_{i+1}(i_k) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \dots & f_k(i_k)
\end{vmatrix} \times
$$

$$\times\ \mu(i_1,\ldots,i_k) =$$

$$= \int_{L_n^k} (f_1,f_2,\ldots f_{i-1},f_i,f_{i+1},\ldots,f_k)d\mu + \int_{L_n^k} (f_1,f_2,\ldots,f_{i-1},f_i',f_{i+1},\ldots,f_k)d\mu.$$

Според дефиницијата на Λ имаме

$$\Lambda(f_1,f_2,\ldots,f_{i-1},f_i',f_{i+1},\ldots,f_k) =$$
$$= \Lambda(f_1,f_2,\ldots,f_{i-1},f_i,f_{i+1},\ldots,f_k) + \Lambda f_1,f_2,\ldots,f_{i-1},f_i',f_{i+1},\ldots,f_k)$$

односно исполнето е првото својство.

Нека $A \in M_k(\mathrm{R})$ и $f_1,\ldots,f_k\colon L_n \to \mathbf{R}$ се произволно зададени. Тогаш

$$\int_{L_n^k} A(f_1,f_2,\ldots,f_k)^T d\mu = \int_{L_n^k} \left(\sum_{p=1}^k a_{1p}f_p, \sum_{p=1}^k a_{2p}f_p,\ldots,\sum_{p=1}^k a_pf_p\right) d\mu =$$

$$= \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_k \\ i_1,i_2,\ldots,i_k=1}}^{n} \begin{vmatrix} \sum_{p=1}^k a_{1p}f_p(i_1) & \sum_{p=1}^k a_{1p}f_p(i_2) & \sum_{p=1}^k a_{1p}f_p(i_3) & \ldots & \sum_{p=1}^k a_{1p}f_p(i_k) \\ \sum_{p=1}^k a_{2p}f_p(i_1) & \sum_{p=1}^k a_{2p}f_p(i_2) & \sum_{p=1}^k a_{2p}f_p(i_3) & \ldots & \sum_{p=1}^k a_{2p}f_p(i_k) \\ \sum_{p=1}^k a_{3p}f_p(i_1) & \sum_{p=1}^k a_{3p}f_p(i_2) & \sum_{p=1}^k a_{3p}f_p(i_3) & \ldots & \sum_{p=1}^k a_{3p}f_p(i_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \sum_{p=1}^k a_{kp}f_p(i_1) & \sum_{p=1}^k a_{kp}f_p(i_2) & \sum_{p=1}^k a_{kp}f_p(i_3) & \ldots & \sum_{p=1}^k a_{kp}f_p(i_k) \end{vmatrix} \times$$

$$\times\ \mu(i_1,\ldots,i_k).$$

За кој било од собироците од десната страна на последното равенство имаме

$$\begin{vmatrix} \sum_{p=1}^k a_{1p}f_p(i_1) & \sum_{p=1}^k a_{1p}f_p(i_2) & \sum_{p=1}^k a_{1p}f_p(i_3) & \cdots & \sum_{p=1}^k a_{1p}f_p(i_k) \\ \sum_{p=1}^k a_{2p}f_p(i_1) & \sum_{p=1}^k a_{2p}f_p(i_2) & \sum_{p=1}^k a_{2p}f_p(i_3) & \cdots & \sum_{p=1}^k a_{2p}f_p(i_k) \\ \sum_{p=1}^k a_{3p}f_p(i_1) & \sum_{p=1}^k a_{3p}f_p(i_2) & \sum_{p=1}^k a_{3p}f_p(i_3) & \cdots & \sum_{p=1}^k a_{2p}f_p(i_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{p=1}^k a_{kp}f_p(i_1) & \sum_{p=1}^k a_{kp}f_p(i_2) & \sum_{p=1}^k a_{kp}f_p(i_3) & \cdots & \sum_{p=1}^k a_{kp}f_p(i_k) \end{vmatrix} =$$

$$=\det(A\cdot B_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) = (\det A)\cdot(\det B_{i_1,i_2,\ldots,i_k})$$

каде A е дадената матрица а

$$B_{i_1,i_2,\dots,i_k} = \begin{bmatrix} f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3) & \cdots & f_1(i_k) \\ f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \cdots & f_2(i_k) \\ f_3(i_1) & f_3(i_2) & f_3(i_3) & \cdots & f_3(i_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \cdots & f_k(i_k) \end{bmatrix}$$

Според тоа

$$\int_{L_n^k} A(f_1, f_2, \dots, f_k) d\mu = \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_k \\ i_1,i_2,\dots,i_k=1}}^{n} (\det A)(\det B_{i_1,i_2,\dots,i_k}) \mu(i_1, i_2, \dots, i_k) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_k \\ i_1,i_2,\dots,i_k=1}}^{n} (\det A) \left(\begin{vmatrix} f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3) & \cdots & f_1(i_k) \\ f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \cdots & f_2(i_k) \\ f_3(i_1) & f_3(i_2) & f_3(i_3) & \cdots & f_3(i_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \cdots & f_k(i_k) \end{vmatrix} \right) \mu(i_1, i_2, \dots, i_k) =$$

$$= (\det A) \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_k \\ i_1,i_2,\dots,i_k=1}}^{n} \begin{vmatrix} f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3) & \cdots & f_1(i_k) \\ f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \cdots & f_2(i_k) \\ f_3(i_1) & f_3(i_2) & f_3(i_3) & \cdots & f_3(i_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \cdots & f_k(i_k) \end{vmatrix} \mu(i_1, i_2, \dots, i_k) =$$

$$= (\det A) \int_{L_n^k} (f_1, f_2, \dots, f_k) d\mu$$

За второто својство имаме

$$\int_{L_n^k} A(f_1, f_2, \dots, f_k)^T d\mu = (\det A) \int_{L_n^k} (f_1, f_2, \dots, f_k) d\mu.$$

Значи функционалот Λ определен со погорното равенство го исполнува условот

$$\Lambda \left(A(f_1, f_2, \dots, f_k)^T \right) = (\det A) \Lambda(f_1, f_2, \dots, f_k),$$

т.е. конечно Λ е k-линеарен функционал.

Во овој случај C_{L_n} (на множеството L_n разгледуваме дискретна топологија) е $\mathbf{R}^n$, каде $\mathbf{R}$ е множеството реални броеви. Според тоа конструираниот линеарен функционал е k-линеарен функционал.

Нека $\Lambda\colon (\mathbf{R}^n)^k \to \mathbf{R}$ е произволно зададен k-линеарен функционал. На векторскиот простор $\mathbf{R}^n$ ја разгледуваме стандардната база $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогаш за произволна низа $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbf{R}^n$, при што

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) = x_{i1}e_1, x_{i2}e_2 + \cdots + x_{in}e_n = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}e_j$$

имаме

$$\begin{aligned}
\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k) &= \Lambda\left(\sum_{j=1}^{n} x_{1j}e_j, \sum_{j=1}^{n} x_{2j}e_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_{kj}e_j,\right) = \\
&= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} \Lambda(x_{1i_1}e_{i_1}, x_{2i_2}e_{i_2}, x_{3i_3}e_{i_3}, \ldots, x_{ki_k}e_{i_k}) = \\
&= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1} x_{1i_1}x_{2i_2}x_{3i_3}\ldots, x_{ki_k}\Lambda e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots, e_{i_k})
\end{aligned}$$

бидејќи ако

$$B_{i_1 i_2 i_3, \ldots, i_k} = \begin{bmatrix} x_{1i_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_{2i_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & x_{3i_3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{ki_k} \end{bmatrix},$$

тогаш

$$\begin{aligned}
&\Lambda(x_{1i_1}e_{i_1}, x_{2i_2}e_{i_2}, x_{3i_3}e_{i_3}, \ldots, x_{ki_k}e_{i_k}) = \\
&= \Lambda\left(B_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k}(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots, e_{i_k})^T\right) = \\
&= \det(B_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k})\Lambda(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots, e_{i_k})
\end{aligned}$$

односно дадените претходни равенства се точни. Определуваме

$$\Lambda(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots, e_{i_k}) = \mu(i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

па според тоа добиваме

$$\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} x_{1i_1}, x_{2i_2} x_{3i_3} \ldots x_{ki_k} \mu(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k) \Lambda(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}) =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} x_{1i_1} x_{2i_2} x_{3i_3} \ldots, x_{ki_k} \mu(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k)$$

Ако ги искористиме условите:

$\Lambda(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots, e_{i_k}) = 0$, ако $i_p = i_t$, за некои $p, t \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $p \neq t$ $x_{si_s} = f_s(i_s)$, $s = 1, 2, \ldots, k$; $i_s = 1, 2, \ldots, n$

$$\Lambda\left(e_{\pi(i_1)}, e_{\pi(i_2)}, e_{\pi(i_3)}, \ldots, e_{\pi(i_k)}\right) = (-1)^{I(\pi)} \Lambda\left(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots, e_{i_k}\right)$$

според дефиницијата на μ добиваме

$$\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$

$$\sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_k = 1 \\ i_1, i_2 < \ldots i_k = 1}}^{n} \sum_{\pi \in S_k} x_{1i_{\pi(1)}} x_{2i_{\pi(2)}} x_{3i_{\pi(3)}} \cdots x_{ki_{\pi(k)}} \mu(i_{\pi(1)}, i_{\pi(2)}, i_{\pi(3)}, \ldots, i_{\pi(k)}) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_k = 1 \\ i_1, i_2 < \ldots i_k = 1}}^{n} \sum_{\pi \in S_k} x_{1i_{\pi(1)}} x_{2i_{\pi(2)}} x_{3i_{\pi(3)}} \cdots x_{ki_{\pi(k)}} (-1)^{I(\pi)} \mu(i_1, i_2, \ldots i_k) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_k = 1 \\ i_1, i_2 < \ldots i_k = 1}}^{n} \left(\sum_{\pi \in S_k} x_{1i_{\pi(1)}} x_{2i_{\pi(2)}} x_{3i_{\pi(3)}} \cdots x_{ki_{\pi(k)}} (-1)^{I(\pi)} \right) \mu(i_1, i_2, \ldots i_k) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_k = 1 \\ i_1, i_2 < \ldots i_k = 1}}^{n} \begin{vmatrix} x_{1i_1} & x_{1i_2} & x_{1i_3} & \cdots & x_{1i_k} \\ x_{2i_1} & x_{2i_2} & x_{2i_3} & \cdots & x_{2i_k} \\ x_{3i_1} & x_{3i_2} & x_{3i_3} & \cdots & x_{3i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{ki_1} & x_{ki_2} & x_{ki_3} & \cdots & x_{ki_k} \end{vmatrix} \mu(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k) =$$

$$
= \sum_{\substack{i_1,i_2<\dots i_k=1 \\ i_1<i_2<\dots<i_k=1}}^{n} \begin{vmatrix} f_1(i_1) & f_1(i_2) & f_1(i_3) & \cdots & f_1(i_k) \\ f_2(i_1) & f_2(i_2) & f_2(i_3) & \cdots & f_2(i_k) \\ f_3(i_1) & f_3(i_2) & f_3(i_3) & \cdots & f_3(i_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k(i_1) & f_k(i_2) & f_k(i_3) & \cdots & f_k(i_k) \end{vmatrix} \mu(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) =
$$

$$
= \int_{L_n^k} (f_1, f_2, \dots, f_k) d\mu.
$$

Значи постои мера $\mu : P(L_k^k) \to \mathbf{R}$ така што

$$
\Lambda(f_1, f_2, \dots, f_k) = \int_{L_n^k} (f_1, f_2, \dots, f_k) d\mu
$$

каде

$$
f_i = (f_i(1), f_i(2), \dots, f_i(n)) = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, k.
$$

Јасно е дека ваквата мера е единствена.
Според тоа точна е следната теорема.

Теорема. Ако $\Lambda : (\mathbf{R}^n)^k \to \mathbf{R}$ е k-линеарен функционал, тогаш постои единствена мера μ на $P(L_n^k)$ таква што

$$
\mu\left(i_{\pi(1)}, i_{\pi(2)}, \dots, i_{\pi(k)}\right) = (-1)^{I(\pi)} \mu(i_1, i_2, \dots, i_k)
$$

$\mu(i_1, i_2, \dots, i_k) = 0$, ако постојат $s, t \in \{1, 2, \dots, k\}$, $s \neq t$ за кои $i_t = i_s$ и

$$
\Lambda(f_1, f_2, \dots, f_k) = \int_{L_n^k} (f_1, f_2, \dots, f_k) d\mu,
$$

за кои било $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathbf{R}^n$,

$$
f_i = (f_i(1), f_i(2), f_i(3), \dots, f_i(n)) = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{in}). \quad \square
$$

Литература

[1] Gähler S.: *Lineare 2-normierte Raume*, Math. Nach. 28(1965).

[2] Malčeski, R.: *The Hahn-Banach theorem for buonded n-linear functionals*, Matematichki bilten, 23, (2000).

[3] Kim, S.S., Cho, Y.J., White, A.: *Linear operators in linear Normed spaces*, Glasnik Math. (1992), 63-70.

[4] Малчески, А.: *Забелешка за дефиницијата на 2-нормиран простор*, (предпечат).

INTEGRAL REPRESENTATION ON A k-LINEAR FUNCTIONAL

Aleksa Malčeski

Summary

In all papers from 2-normed spaces and 2-half-norms under 2-linear functional we assume bilinear functional. Natural generalization on bilinear functional is the k-linear functional.

In this paper we introduced a new kind of k-linear functional (2-linear functional) and in case when the vector space is finite dimensional we will give its characterization. Introduced class k-linar functionals in fact is a subclass from the class that in literature carries this name.

University "St. Kiril and Metodij"

Faculty of Mechanical Engineering

P.O. Box 464

1000 Skopje

Republic of Macedonia

e-mail: aleksa@mf.ukim.edu.mk