

## ЗА ЕДЕН СТАВ НА ВЕКТОРСКАТА АЛГЕБРА

В. ЈАНЕКОСКИ

По векторски пат, ќе биде докажан познатиот став: мешаниот производ на три вектора не се менува ако се изврши циклична замена на истите.

Користејќи го дистрибутивниот закон за векторско и скаларно множење, за три произволни вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , важи

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$
 и од тука

$$(1) \quad [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})] \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}).$$

Векторскиот производ на два вектора е нормален на секој од двата вектора, паڪ  $\mathbf{e}$

$$(2) \quad [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})] \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 0,$$

$$(2') \quad (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = 0, \quad (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Поради дистрибутивноста на скаларниот производ, а со оглед на (2'), изразите  $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a})$  и  $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a})$  стануваат респективно  $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$  и  $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$ . Земајќи во предвид (2) и (2'), релацијата (1) може, сега, да се напише како

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = 0,$$

откаде, поради алтернативноста на векторскиот производ:  $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , произлегува

$$(3) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a},$$

што го докажува ставот.

Burali—Forti и Marcolongo\*) ја добиваат релацијата (3) користејќи ја особината на двојниот векторски производ  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  истиот да може по векторот  $\mathbf{b}$  да се изрази на два начина. Се нагласува, исто така, дека доказот на овие автори, во сашност, е заснован на дистрибутивниот закон за скаларно и векторско множење.

\*) Elementi di Calcolo vettoriale, seconda edizione, Bologna 1921, p. 32.

V. Janekoski, Skopje

## SUR UN THÉORÈME DE L' ALGÈBRE VECTORIELLE

### Résumé

Tenant compte de la distributivité par rapport à l'addition des multiplications vectorielle et scalaire, pour les vecteurs quelconques  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  on a

$$(1) \quad [\mathbf{b} \wedge (\mathbf{c} + \mathbf{a})] \times (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a}).$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs, étant perpendiculaire à chacun de ses facteurs, il s'ensuit que

$$[\mathbf{b} \wedge (\mathbf{c} + \mathbf{a})] \times (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \times \mathbf{a} = 0.$$

Les expressions  $(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})$  et  $(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})$  deviennent respectivement  $(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$  et  $(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \times \mathbf{c}$  et pour (1) on déduit tout de suite

$$(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \times \mathbf{c} = 0,$$

ce qui, à cause de la propriété d'alternance du produit vectoriel, démontre la propriété bien connue: *le produit mixte reste invariable si l'on effectue une permutation circulaire de ses facteurs.*

Burali — Forti et Marcolongo\*) obtiennent le résultat précédent grâce à la propriété du double produit vectoriel  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$  que le même peut s'exprimer par le vecteur  $\mathbf{b}$  de deux façons. Il faut souligner ici que la démonstration de ces auteurs est fondée, en réalité, sur la propriété distributive des multiplications scalaire et vectorielle.