Математички Билтен ISSN 0351–336X
29 (LVI)
2006 (63–70)
Скопје, Македонија

ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНАТА РАВЕНКА НА LAME

Боро М. Пиперевски

Апстракт

Во овој труд се разгледува диференцијалната равенка на Lame. Со користење на полиномното решение на Hermite се добива егзистенција и конструкција на едно решение на седум класи диференцијални равенки од трет ред со полиномни коефициенти.

1. Вовед

Во овој труд се разгледува диференцијалната равенка на Lame

$$-\frac{d^2y}{du^2}+n(n+1)\wp(u)y=\lambda y, \tag{1}$$

каде $\wp(u)$ е специјална елиптичка функција на Вајерстрасе со параметри e_1, e_2, e_3, каде $e_1+e_2+e_3=0$, nприроден број и λ - параметар. Функцијата на Вајерстрасе е ди-периодична елиптичка функција со два периода и е решение на диференцијалната равенка:

$$\wp'^2(u)=\big(\wp(u)-e_1\big)\big(\wp(u)-e_2\big)\big(\wp(u)-e_3\big)$$

Равенката на Lame има и своја алгебарска форма:

$$2\varphi(x)y"+\varphi'(x)y'-2\big[n(n+1)-\lambda\big]y=0, \tag{1'}$$

каде $\varphi(x)=4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$. Врската меѓу двата вида е дадена со $\wp(u)=x$. Равенката на Lame е специјален случај на равенка на Shredinger со периодичен потенцијал и спектар кој има на полуоската точно n слоеви. Оваа равенка е и специјален случај на равенка на Hil.

Во теоријата на парцијални равенки е познат класичниот резултат за решавање на внатрешна задача на Dirihle за контурен проблем за Лапласова парцијална диференцијална равенка во сфера. Со трансформација во сферни координати и користење на Фуриеов метод на раздвојување на променливите се добиваат диференцијалниравенки чии решенија се класичните ортогонални Лезандрови полиноми кои се и сопствени функции за соодветна Штурм-Лиувилова задача. При тоа решенијата на Лапласовата парцијална диференцијална равенка се добиваат во вид на хомогени полиноми од соодветен степен и се наречени сферни хармонични функции.

Овој приод кон решавање на истата задача но за елипсоид го користел Lame со воведување на елиптички координати во Лапласовата парцијална диференцијална равенка. Со користење на елиптички функции и со користење на Фуриеовиот метод на разделување на променливите, добил диференцијална равенка од вид

$$-\frac{d^2y}{du^2} + \big[a\wp(u) + b\big]y = 0,$$

каде $\wp(u)$ е специјална елиптичка функција на Вајерстрасе со параметри e_1, e_2, e_3, каде $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, и каде a и b се параметри кои треба да се определат од условите на задачата.

Од условот на Дирихлеовата задача за барање решение хомоген полином од степен n т.е. аналитичка хармониска функција во соодветната област, се добива услов параметарот a да биде од вид $a = -n(n+1)$, n природен број.

До истиот услов се доаѓа и од класичната теорија за диференцијалната равенка на Lame во алгебарска форма од класа на Фукс со пет регуларни сингуларитети

$$\varphi(x)y" + \frac{1}{2}\varphi'(x)y' + (ax+b)y = 0,$$

како од друг приод, за задоволување на условот оваа равенка да има општо решение еднозначна аналитичка функција.

Се покажува дека тој услов е потребен и доволен.

Со тоа равенката на Lame го добива видот (1) односно (1′), при што нејзините решенија се единствено од осум вида со четири облика:

$$\begin{aligned}
&(A): && P,\\
&(B): && \big(\wp(u)-e_i\big)^{1/2}P, \quad i=1,2,3,)\\
&(C): && \big(\wp(u)-e_i\big)^{1/2}\big(\wp(u)-e_j\big)^{1/2}P,\ i=1,2,3,\ j=1,2,3,\ i\neq j,\\
&(C): && \big(\wp(u)-e_1\big)^{1/2}\big(\wp(u)-e_2\big)^{1/2}\big(\wp(u)-e_3\big)^{1/2}P
\end{aligned} \tag{2}$$

каде $\wp(u)$ е функцијата на Вајерштрас, а P е полином од $\wp(u)$,

и во алгебарски вид:

$$\begin{aligned}
&(A'): && P(x),\\
&(B'): && (x-e_i)^{1/2}P(x), \quad i=1,2,3,\\
&(C'): && (x-e_i)^{1/2}(x-e_j)^{1/2}P(x),\ i=1,2,3,\ j=1,2,3,\ i\neq j,\\
&(D'): && (x-e_1)^{1/2}(x-e_2)^{1/2}(x-e_3)^{1/2}P(x)
\end{aligned} \tag{2'}$$

каде $P(x)$ е полином од x.

Параметарот $b=\lambda$ добива точно $2n+1$ вредности.За n парен број $\frac{1}{2}(n+2)$ решенија се од типот (A) и $\frac{3}{2}n$ решенија од типот (C). За n непарен број $\frac{3}{2}(n+1)$ решенија се од типот (B) и $\frac{1}{2}(n-1)$ решенија од типот (D).

Овие вредности можат да се наречат и сопствени вредности, на кои им одговараат соодветни решенија на равенката на Lame, наречени сопствени функции. Значи оваа задача може да се разгледува и како решавање на Стурм-Лиувилова задача односно проблем за наогјање сопствени вредности и сопствени функции на еден специјален диференцијален оператор

$$l=-\frac{d^2}{dx^2}+q(x).$$

Сите сопствени вредности се реални броеви. Јасно е дека сопствени функции како решенија на равенката на Lame можат да бидат полиноми од степен k само во случаите $n=2k$ и тоа точно $k+1$ на број кои одговараат точно на $k+1$ сопствени вредности на параметарот λ [1], [3].

Со добивање на сите $2n+1$ решенија на равенката на Lame кои соодвецтвуваат на $2n+1$ вредности на параметарот λ, се овозможува добивањето на бараното решение на Дирихлеовата задача (контурен проблем) како троен производ (во согласност со методот на Фурие), кое е хомоген полином од степен n во однос на Декартовите правоаголни координати. Овие хомогени хармониски полиноми како решенија на Дирихлеовата задача се наречени полиноми на Lame.

Да забележиме дека и кај контурниот проблем со сфера исто така се добиваат точно $2n+1$ линеарно независни решенија.

Познат е резултатот за формирање на диференцијалната равенка од трет ред

$$y''' + 3fy" + (f' + 2f^2 + 4g)y' + (4fg + 2g')y = 0$$

чии решенија се производи од две решенија на диференцијална равенка од втор ред

$$y'' + fy' + gy = 0$$

Со користење на овој резултат се добива дека равенката од трет ред од вид

$$2\varphi y''' + 3\varphi' y'' + \{\varphi'' - 8[n(n+1)x - \lambda]\}y' - 4n(n+1)y = 0, \qquad (*)$$

има решение $F(x)$ кое е полином од степен n и е производ $F = y_1 y_2$ од две решенија y_1, y_2 на равенката на Lame$(1')$. Оваа полиномно решение е полином за произволно λ и е наречен полином на Hermit.

Нека е дадена диференцијална равенка од втор ред од вид

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)y'' + (b_2x^2 + b_1x + b_0)y' + (c_1x + c_0) = 0, \qquad (3)$$

каде $x_1 \neq x_2 \neq x_3$.

Во [2] е покажано дека со трансформацијата дефинирана со

$$y = (x - x_1)^{\alpha}(x - x_2)^{\beta}(x - x_3)^{\gamma}z, \qquad (3')$$

диференцијалната равенка (3) се трансформира во најмногу 7 други диференцијални равенки од ист вид. Ако оваа трансформација ја примениме конкретно за равенката на Lame од вид $(1')$ тогаш се добиваат следните 7диференцијални равенки:

$$2\varphi z_1" + [\varphi' + 8(x^2 + e_1x + e_2e_3)]z_1' + \{-2[n(n+1)x - \lambda] + (4x + 2e_1)\}z_1 = 0, \quad (\mathrm{I})$$

$$2\varphi z_2" + [\varphi' + 8(x^2 + e_2x + e_1e_3)]z_2' + \{-2[n(n+1)x - \lambda] + (4x + 2e_2)\}z_2 = 0, \quad (\mathrm{II})$$

$$2\varphi z_3" + [\varphi' + 8(x^2 + e_3x + e_1e_2)]z_3' + \{-2[n(n+1)x - \lambda] + (4x + 2e_3)\}z_3 = 0, \quad (\mathrm{III})$$

$$2\varphi z_4" + [\varphi' + 8(2x^2 - e_3x + e_3^2]z_4' + \{-2[n(n+1)x - \lambda] + (12x - 6e_3)\}z_4 = 0, \quad (\mathrm{IV})$$

$$2\varphi z_5" + [\varphi' + 8(2x^2 - e_2x + e_2^2]z_5' + \{-2[n(n+1)x - \lambda] + (12x - 6e_2)\}z_5 = 0, \quad (\mathrm{V})$$

$$2\varphi z_6" + [\varphi' + 8(2x^2 - e_1x + e_1^2]z_6' + \{-2[n(n+1)x - \lambda] + (12x - 6e_1)\}z_6 = 0, \quad (\mathrm{VI})$$

$$2\varphi z_7" + 3\varphi' z_7' + \{-2[n(n+1)x - \lambda] + \varphi''\}z_7 = 0. \qquad (\mathrm{VII})$$

Во тој случај според (3′) врските меѓу соодветните решенија се дадени со:

$$
\begin{aligned}
y =&(x-e_1)^{1/2}z_1, y=(x-e_2)^{1/2}z_2, y=(x-e_3)^{1/2}z_3,\\
y =&(x-e_1)^{1/2}(x-e_2)^{1/2}z_4, y=(x-e_1)^{1/2}(x-e_3)^{1/2}z_5, \qquad (4')\\
y =&(x-e_2)^{1/2}(x-e_3)^{1/2}z_6, y=(x-e_1)^{1/2}(x-e_2)^{1/2}(x-e_3)^{1/2}z_7.
\end{aligned}
$$

Во врска со потребниот услов за егзистенција на полиномно решение за равенките $(1'), (\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V}), (\mathrm{VI}), (\mathrm{VII})$, корените на соодветните карактеристични равенки се

$(\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n)$	за равенката	$(1')$;
$(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n, -1-\frac{1}{2}n)$	за равенките	(I), (II), (III);
$(-1+\frac{1}{2}n, -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}n)$	за равенките	(IV), (V), (VI);
$(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}n, -2-\frac{1}{2}n)$	за равенката	(VII).

Во литературата [3] е познато дека потребен услов диференцијалната равенка од вид $(1')$ да има полиномно решение е соодветната карактеристична равенка да има корен природен број. Според тоа за $n=2k$ (парен број) можни полиномни решенија од степен k и $k-1$ може да се бараат кај диференцијалните равенки $(1'), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V}), (\mathrm{VI})$, а за $n=2k-1$ (непарен број) можни полиномни решенија од степен $k-1$ и $k-2$ може да се бараат кај диференцијалните равенки $(\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III}), (\mathrm{IV})$.

Лема: *Сите функции на Ламе од видовите* $(2')$ *се добиваат со помош на полиномни решенија само на диференцијалните равенки* $(1'), (\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V}), (\mathrm{VI}), (\mathrm{VII})$.

Да забележиме дека за диференцијалната равенка од трет ред $(*)$ соодветната карактеристична равенка за корени ги има броевите $n, -(n+1), -\frac{1}{2}$ што значи дека е задоволен потребниот и доволен услов за егзистенција на единствено полиномно решение полиномот на Hermit. Со користење на резултатот за добивање на диференцијална равенка од трет ред која има решенија производ од две решенија на диференцијална равенка од втор ред, од диференцијалните равенки $(\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V}), (\mathrm{VI}), (\mathrm{VII})$ се добиваат соодветно следните седум диференцијални равенки од трет ред:

$$
\begin{aligned}
&2\varphi^2 Z_1''' + 3\varphi[\varphi' + 8(x^2+e_1x+e_2e_3)]Z_1'' + \{\varphi''\varphi + 16(2x+e_1)\varphi+\\
&+8(x^2+e_1x+e_2e_3)\varphi' + 64(x^2+e_1x+e_2e_3)^2 - 8[n(n+1)x-\lambda]\varphi\}Z_1'+\\
&+\{8\varphi - 32[n(n+1)-\lambda](x^2+e_1x+e_2e_3)+\\
&+32(2x+e_1)(x^2+e_1x+e_2e_3) - 4n(n+1)\varphi\}Z_1 = 0, \qquad (\mathrm{I}_1)
\end{aligned}
$$

$$2\varphi^2 Z_2''' + 3\varphi[\varphi' + 8(x^2 + e_2x + e_1e_3)]Z_2'' + \{\varphi''\varphi + 16(2x + e_2)\varphi +$$
$$+ 8(x^2 + e_2x + e_1e_3)\varphi' + 64(x^2 + e_2x + e_1e_3)^2 - 8[n(n+1)x - \lambda]\varphi\}Z_2' +$$
$$+ \{8\varphi - 32[n(n+1) - \lambda](x^2 + e_2x + e_1e_3) +$$
$$+ 32(2x + e_2)(x^2 + e_2x + e_1e_3) - 4n(n+1)\varphi\}Z_2 = 0, \qquad (\mathrm{II}_1)$$

$$2\varphi^2 Z_3''' + 3\varphi[\varphi' + 8(x^2 + e_3x + e_1e_2)]Z_3'' + \{\varphi''\varphi + 16(2x + e_3)\varphi +$$
$$+ 8(x^2 + e_3x + e_1e_2)\varphi' + 64(x^2 + e_3x + e_1e_2)^2 - 8[n(n+1)x - \lambda]\varphi\}Z_3' +$$
$$+ \{8\varphi - 32[n(n+1) - \lambda](x^2 + e_3x + e_1e_2) +$$
$$+ 32(2x + e_3)(x^2 + e_3x + e_1e_2) - 4n(n+1)\varphi\}Z_3 = 0, \qquad (\mathrm{III}_1)$$

$$2\varphi^2 Z_4''' + 3\varphi[\varphi' + 8(2x^2 - e_3x - e_3^2)]Z_4'' + \{\varphi''\varphi + 16(5x - 2e_3)\varphi +$$
$$+ 8(2x^2 - e_3x - e_3^2)\varphi' + 64(2x^2 - e_3x - e_3^2)^2 - 8[n(n+1)x - \lambda]\varphi\}Z_4' +$$
$$+ \{24\varphi - 32[n(n+1) - \lambda](2x^2 - e_3x - e_3^2) +$$
$$+ 32(6x + 3e_3)(2x^2 - e_3x - e_3^2) - 4n(n+1)\varphi\}Z_4 = 0, \qquad (\mathrm{IV}_1)$$

$$2\varphi^2 Z_5''' + 3\varphi[\varphi' + 8(2x^2 - e_2x - e_2^2)]Z_5'' + \{\varphi''\varphi + 16(5x - 2e_2)\varphi +$$
$$+ 8(2x^2 - e_2x - e_2^2)\varphi' + 64(2x^2 - e_2x - e_2^2)^2 - 8[n(n+1)x - \lambda]\varphi\}Z_5' +$$
$$+ \{24\varphi - 32[n(n+1) - \lambda](2x^2 - e_2x - e_2^2) +$$
$$+ 32(6x + 3e_2)(2x^2 - e_2x - e_2^2) - 4n(n+1)\varphi\}Z_5 = 0, \qquad (\mathrm{V}_1)$$

$$2\varphi^2 Z_6''' + 3\varphi[\varphi' + 8(2x^2 - e_1x - e_1^2)]Z_6'' + \{\varphi''\varphi + 16(5x - 2e_1)\varphi +$$
$$+ 8(2x^2 - e_1x - e_1^2)\varphi' + 64(2x^2 - e_1x - e_1^2)^2 - 8[n(n+1)x - \lambda]\varphi\}Z_6' +$$
$$+ \{24\varphi - 32[n(n+1) - \lambda](2x^2 - e_1x - e_1^2) +$$
$$+ 32(6x + 3e_1)(2x^2 - e_1x - e_1^2) - 4n(n+1)\varphi\}Z_6 = 0, \qquad (\mathrm{VI}_1)$$

$$2\varphi^2 Z_7''' + 9\varphi\varphi' Z_7'' + \{7\varphi''\varphi + 6\varphi'^2 - 8[n(n+1)x - \lambda]\varphi\}Z_7' +$$
$$+ \{2\varphi'''\varphi + 4\varphi''\varphi' - 8[n(n+1) - \lambda]\varphi' - 4n(n+1)\varphi\}Z_7 = 0, (\mathrm{VII}_1)$$

Со користење на врските (4$'$) се добиваат партикуларни решенија на диференцијални равенки од трет ред од вид $(\mathrm{I}_1), (\mathrm{II}_1), (\mathrm{III}_1), (\mathrm{IV}_1), (\mathrm{V}_1), (\mathrm{VI}_1), (\mathrm{VII}_1)$, изразени со полиномното решение Fна диференцијалната равенка $(*)$.

Теорема: *Диференцијалните равенки од трет ред од вид* (I_1), $(\mathrm{II}_1), (\mathrm{III}_1)$, $(\mathrm{IV}_1), (\mathrm{V}_1), (\mathrm{VI}_1), (\mathrm{VII}_1)$ *имаат едно решение изразено со полиномот на Хермит F како полиномно решение на диференцијалната равенка од трет ред $(*)$. При тоа формулата на соодветното решение е дадено со:*

$$Z_1 = (x - e_1)^{-1}F, Z_2 = (x - e_2)^{-1}F, yZ_3 = (x - e_3)^{-1},$$
$$Z_4 = (x - e_1)^{-1}(x - e_2)^{-1}F, Z_5 = (x - e_1)^{-1}(x - e_3)^{-1}F, \qquad (5)$$
$$Z_6 = (x - e_2)^{-1}(x - e_3)^{-1}F, Z_7 = (x - e_1)^{-1}(x - e_2)^{-1}(x - e_3)^{-1}F.$$

Литература

[1] E. Heine: *Uber lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, so wie uber die Existenz und Anzahl der Lame'shen Funktionen erster Art Monatsberichte der Kon Preuss.* Akademie Wissenschaften, Berlin 1864 (1865), 13-22.

[2] Boro Piperevski: *One transformation of a class of linear differential equations of the second order,* Proceedings, Department of Electrical Engineering, tome 6-7, (27-34), 1990, Skopje.

[3] Sheffer, I.M.: *On the properties of polynomials satisfying a linear differential equations: Part* I; Transactions of the American Mathematical Society, 35(1933), 184-214, Menasha – New York.

ON A LAME DIFFERENTIAL EQUATION

Boro M. Piperevski

S u m m a r y

In this work we consider Lame's differential equation. With the Hermite polynomial we be obtained formula for one particular solution of a seven class linear homogenous differential equations of the third order with polynomial coefficients.

"Ss Cyril and Methodius" University
Faculty of Electrical Engineering
P.O.Box 574, 1000 Skopje
Republic of Macedonia

e-mail: borom@etf.ukim.edu.mk