ВИКТОР ЈАНЕКОСКИ

ЗА ДВОЈНИОТ ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД ЗА ДИСТРИБУТИВНИОТ ЗАКОН ЗА ВЕКТОРСКО МНОЖЕЊЕ НА КОМПЛАНАРНИ ВЕКТОРИ

I

Трансформационата формула на двојниот векторски производ

$$(1) \qquad (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{c}\cdot\vec{a})\,\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{a}$$

има честа примена во математиката, физиката и механиката и за неа, во литературата, наидуваме на повеќе геометриски докази {в. [1] — [5]}.

Познатиот доказ со помошта на просторна правоаголна координатна система {в. [1]} имплицитно во себе ги содржи дистрибутивните закони за скаларно и векторско множење на вектори и бара извесно познавање на елементите на аналитичната геометрија во просторот. Во една нота [7] *Chazy*, за случај на компланарни вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, формулата (1) ја докажува геометриски множејќи ги двете страни од (1) скаларно и векторски со векторот $\vec{c}$, т. е. проектирајќи го векторот даден со (1) на две оски: оската одредена со векторот $\vec{c}$ и на неа нормална; во последниот случај на векторското множење, (1) се верификува со сведувања на адиционата теорема на функцијата sinus.

Тука ќе бидат изведени два геометриски докази на формулата (1) за кои сметаме дека се едноставни бидејќи бараат релативно едноставен алгебарско-векторски апарат. Притоа ќе се повикаме на дистрибутивниот закон за скаларно множење на вектори во однос на нивното собирање како и на тривијалната особина на векторското множење.

$$(2) \qquad (\vec{a} + \lambda\vec{b}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$$

која што непосредно произлегува од површинско значење на векторскиот производ. Ќе уочиме, исто така, дека за докажување на (1) доволно е да се посматра случајот на компланарни вектори; за случај на некомпланарни вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, со оглед на дистрибутивноста на скаларното множење и особината (2), двете страни на (1) — по извршените назначени операции — остануваат непроменети ако таму векторот $\vec{c}$ се замени со векторот $\vec{c} + \lambda\,(\vec{a}\times\vec{b})$, каде што λ е еден произволен скалар.*)

1. 1. Формулата (1) се докажува на следниот начин, Бидејќи и двете страни од (1) се хомогени по алгебарските вредности на векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, во однос на нивните ортови, можеме да посматраме случај кога $\vec{a} = \vec{a}_0$ и $\vec{b} = \vec{b}_0$ меѓу себе се нормални ортови, додека $\vec{c}$ е нивен симетрален вектор со модул $\sqrt{2}$, т. е. тој е даден со дијагоналата на единичниот квадрат конструиран над ортовите $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$: $\vec{c} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0$. Векторот $(\vec{a}_0\times\vec{b}_0)\times\vec{c}$ се добива од векторот $\vec{c}$ со вртење на последниот во рамнината на векторите $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$ во одреден смер за агол од 90°, т. е. $(\vec{a}_0\times\vec{b}_0)\times\vec{c}$ е вектор кој што е дијагонала на единичниот квадрат конструиран над векторите $-\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$:

---

*) Изрази од видот $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$ се еднакви на нула, бидејќи, по дефиниција на векторскиот прозвод векторот $\vec{a}\times\vec{b}$ е нормален на векторот $\vec{a}$

(3) $$(\vec{a}_0 \times \vec{b}_0) \times \vec{c} = \vec{b}_0 - \vec{a}_0.$$

Бидејќи се аглите што ги зафаќа векторот $\vec{c}$ со векторите $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$ еднакви на 45° и $c = \sqrt{2}$, тоа е $\vec{a}_0 \cdot \vec{c} = \vec{b}_0 \cdot \vec{c} = 1$, пак десните страни на (1) и (3) се еднакви. Според тоа, точноста на формулата (1) е докажана за случајот кога векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, со произволни модули a и b, меѓу себе се нормални, додека $\vec{c}$, со произволен модул c, е симетрален вектор на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Формулата (1) важи и за случајот на произволен распоред на компланарни вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. За да се тоа покаже, треба во (1) векторот $\vec{a}$ да се замени со вектор $\vec{a} + \lambda \vec{b}$, каде што λ е произволен скалар. Навистина, со оглед на идентитетот (2), левата страна од (1) останува неизменета. Исто така, ако се земе предвид дистрибутивноста на скаларното множење во однос на собирањето, веднаш се гледа дека не се менува ни десната страна на (1). Ако, сега, истата постапка се повтори со векторот $\vec{b}$, т. е. тој се замени со $\vec{b} + \mu \vec{a}$, каде што μ е пак еден произволен скалар, равенството (1) е одржано, додека за случајот на колинеарноста на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, точноста на (1) се проверува со смената $\vec{b} = \nu \vec{a}$, каде што ν е произволен скалар, со што формулата (1) е докажана во потполност.

1. 2. Компланарните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ нека лежат во рамнината на цртањето (сл. 1). При тоа нека се вектори:

(4) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$,

агли:

(5) $\sphericalangle (\vec{a}, \vec{c}) = \beta$, $\sphericalangle (\vec{c}, \vec{b}) = \alpha$, $\sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) = \alpha + \beta$

и според (4) и (5), модули:

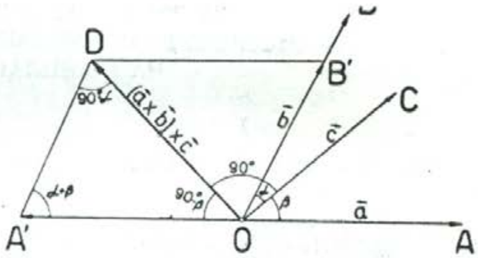
(6) $$OA = a,\ OB = b,\ OC = c, \qquad OD = abc\ \sin\ (\alpha + \beta).$$

Сега е, врз основа на дефиницијата на векторскиот производ, правецот и смерот на векторот $\overrightarrow{OD} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ одреден со вртењето на векторот $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ околу точката O во рамнината на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ во директен смер за агол од 90°.

Ако векторот $\overrightarrow{OD}$ го раставиме во правците на векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имаме

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'D}.$$

Како е



Сл. 1

$$\sphericalangle A'DO = 90° - \alpha,\ \sphericalangle OA'D = \alpha + \beta,$$
$$\sphericalangle DOA' = 90° - \beta,$$

со примена на синусна теорема на триаголникот $A'OD$ добиваме релации:

(7) $$\frac{A'O}{\sin (90° - \alpha)} = \frac{OD}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{A'D}{\sin (90° - \beta)}.$$

Со оглед на последната релација (6), од (7) имаме $OD/\sin\ (\alpha + \beta) = abc$, пак за скаларните компоненти на векторот $\overrightarrow{OD}$ во правците на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаме

$$A'O = abc\ \cos\ \alpha = (\vec{b} \cdot \vec{c})\, a,$$
$$A'D = abc\ \cos\ \beta = (\vec{c} \cdot \vec{a})\, b,$$

откаде

$$\overrightarrow{OA'} = -(\vec{b} \cdot \vec{c})\, a \cdot ort\, \vec{a} = -(\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a},$$

$$\overrightarrow{A'D} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\, b \cdot ort\ \vec{b} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\, \vec{b},$$

што и сакавме да покажеме.

За случај $\sin\ (\alpha + \beta) = 0$, векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, $\vec{b} = \omega \vec{a}$, пак (1) останува во важност. Исто така, со помошта на конструкции слични на таа од сл. 1 или со постапка изнесена кон крајот на точ. **1. 1,** лесно се увидува дека формулата (1) важи и за случајот на други произволни положби на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, т. е. во најопшт случај.

II

Познатата метода на паралелопипед {[3] S. 18, [8]} за докажување на дистрибутивниот закон за векторско множење

$$(1') \qquad (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

не го решува случајот кога векторите се компланарни. *Некрасов* [9], за ваков случај на компланарни вектори, дистрибутивниот закон (1') го докажува со помошта на една метода која всушност се сведува на дистрибутивниот закон за скаларно множење. Истиот се докажува и со помошта на една геометриско-површинска метода на која што наидуваме во механиката [10].

Дистрибутивниот закон за векторско множење на компланарни вектори, всушност, имплицитно се јавува при директно докажување на *Varignon*-овата теорема за моментот на резултантата во однос на точка од рамнината во која што делуваат две или повеќе сили.

Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ бидат три компланарни вектори со заеднички почеток во точката O што лежат во рамнината на цртањето. Притоа, врвот на векторот $\vec{c}$, точката C, нека лизга по правата p повлечена низ врвовите A и B на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Бидејќи ориентисаните површини на триаголниците OAB, OAC и OCB респективно се еднакви на половините од векторските производи $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{c}$ и $\vec{c}\times\vec{b}$, од релацијата (сл. 2):

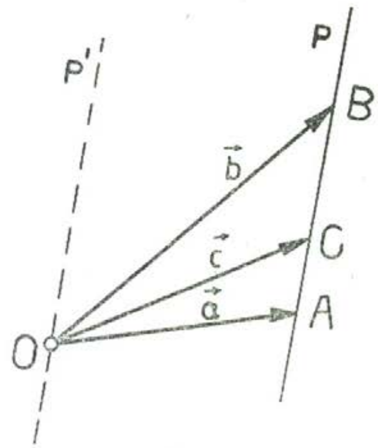
$$area \ \Delta \ OAB = area \ \Delta \ OAC + area \ \Delta \ OCB,$$

добиваме

$$(2') \qquad \vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{b}.$$

Меѓутоа, $area \ \Delta \ OAB$ може да се изрази, како тоа лесно се уочува, и со половината на векторскиот производ $(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{c}$ пак, поради законот за алтернација на векторскиот производ $\vec{c}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{c}$ за (2') сега имаме

$$(3') \qquad (\vec{a}-\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{c},$$



Сл. 2

што, со оглед на тоа дека векторот $-\vec{b}$ може да се замени со векторот $\vec{b}$, и требало да се докаже.

Во тривијалниот случај, кога векторот $\vec{c}$ лежи на правата $p' \,||\, p$, $\vec{c}=\lambda\ (\vec{a}-\vec{b})$, каде што λ е произволен скалар, (3') лесно се проверува водејќи сметка за очигледната површинска релација $\vec{a}\times(\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}\times\vec{b}$. Истото важи и за случајот кога двата или сите три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ се колинеарни.

Дистрибутивниот закон (3') важи и за произволен, со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарен, вектор $\vec{c}$. Навистина, бидејќи изразот (3') е хомоген по однос на векторот $\vec{c}$, истото лесно се утврдува ако во (3') векторот $\vec{c}$ се замени со векторот $\omega\,\vec{c}$, каде што ω е произволен позитивен или негативен скалар.

BIBLIOGRAFIJA

[1] Spielrein J., *Vektorrechnung*, 2 Aufl., Stuttgart, 1926, S 18.

[2] Gans R., *Vektoranalysis*, 6 Aufl., Leipzig—Berlin, 1929, S. 17.

[3] Lagally M., *Vektorrechnung*, 4 Aufl., Leipzig, 1949, S. 31.

[4] Burali Forti C. et Marcolongo R., *Éléments de Calcul vectoriel*, Paris, 1910, pp. 32, 34.

[5] Кочин Н., *Векторное исчисление и начала Тензорного исчисления, изд. 7-ое, Москва, 1951, стр. 62.*

[6] Mitrinović S. D. — Mihailović D., *Linearna algebra — Analitička geometrija — Polinomi*, drugo izdanje, Beograd 1962, str. 201, pr. 2.

[7] Shazy J., *Sur la formule du double produit vectoriel* (Comptes rendus, t. 211, Paris, 1940, p. 449).

[8] Суслов Г., *Теоретическая Механика*, изд. 3-е, Москва, 1946, стр. 9.

[9] Некрасов А., *Курс Теоретической Механики*, т. I, изд. 3-е, Москва, 1945, стр. 36.

[10] Хайкин С., *Механика*, изд. 2-е, Москва, 1947, стр. 144.

RÉSIMÉ

SUR LA FORMULE DU DOUBLE PRODUIT VECTORIEL SUR LA DISTRIBUTIVITÉ DE LA MULTIPLICATION VECTORIELLE DES VECTEURS COPLANAIRES

V. Janekoski, Skopje

I

On démontre la formule (1). D' abord, on démontre (1) dans le cas des vecteurs coplanaires. Puis, en utilisant la relation évidente (2), on établit la formule (1) dans le cas général quand le vecteur $\vec{c}$ ne se trouve pas obligatoirement dans le plan des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Ici, on donne deux démonstrations de (1) pour les vecteurs coplanaires.

1. Par application de l'égalité évidente (3), on vérifie (1) dans le cas $\vec{a} = \vec{a}_0$, $\vec{b} = \vec{b}_0$, $\vec{c} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0$, avec $\vec{a}_0 \perp \vec{b}_0$ et $|\vec{a}_0| = |\vec{b}_0| = 1$. Grâce à l'homogénéité de la formule (1) par rapport aux modules de vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, on passe au cas des vecteurs coplanaires arbitraires en substituant successivement $\vec{a}$ par $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ et puis $\vec{b}$ par $\vec{b} + \mu\vec{a}$.

2. Avec les notations et les valeurs (4), (5) et (6), de la fig. 1, il s'ensuit qu'on a les relations (7). D'où

$$\overrightarrow{OA'} = -(\vec{b}\cdot\vec{c})\; a \text{ ort } \vec{a},$$

$$\overrightarrow{A'D} = (\vec{c}\cdot\vec{a})\; b \text{ ort } \vec{b},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Les cas trivials sont traités en particulier.

II

On omet, souvent, la démonstration de la propriété de distributivité de la multiplication vectorielle par rapport à l'addition (1') dans le cas des vecteurs coplanaires {v. [3], p. 18}.

Ici, on donne une démonstration de la propriété indiquée {voir fig. 2}. Dans la démonstration on emploi les relations géométriques (2') et (3') et la propriété de l'homogénéité de (3') par rapport au module du vecteur $\vec{c}$.

Les cas trivials sont traités en particulier.