Математички Билтен
16 (XLII)
1992 (51-57)
Скопје, Македонија

ЗА НЕКОИ ОЦЕНКИ НА ГРЕШКАТА ПРИ ПРИБЛИЖНОТО СМЕТАЊЕ СО ОСТАТОЦИ

К. Ациевски, В. Бабинкостов, Д. Димитровски

Апстракт. Сметањето со остатоците е обично егзактно. За неговото применување неопходно е прво точно да се определат сингуларитетите на аналитичната функција $f(z)$, а потоа за нив да се пресметаат соодветните остатоци и се примени теоремата на Коши за остатоците. Ние тука ја разгледуваме можноста за применување на сметањето со остатоци во случај на приближно определени сингуларитети-полови, укажувајќи на некои можни оценки на точноста на остатоците, односно интегралите.

Да го разгледаме прво случајот кога аналитичната функција $f(z)$ има само еден пол $z=a$ со кратност s и, значи, кога е можна факторизацијата

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^s},$$

каде што $F(z)$ е аналитична функција во точката $z=a$.

Теорема 1. Ако аналитичната функција $f(z)$ има еден s-кратен пол $z=a$ определен приближно со точност Δa, при што точката $z=a+\Delta a$ не излегува надвор од кругот C со центар во точката $z=a$ и радиус ρ (C може да биде и која било друга контура во која е содржана точката $z=a$), тогаш при

$$f^*(z) = \frac{F(z)}{(z-a-\Delta a)^s},$$

важи

$$\left|\oint_C f(z)dz - \oint_C f^*(z)dz\right| \le \frac{2\pi M}{(s-1)!}|\Delta a|,$$

каде што $M=\max|F^{(s)}(z)|_C$.

Доказ. Навистина, пресметувајќи ги остатоците

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\{(z-a)^s f(z)\} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}F(z) =$$

$$= \frac{F^{(s-1)}(a)}{(s-1)!},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=a+\Delta a} f^*(z) = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to a+\Delta a}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\{(z-a-\Delta a)f^*(z)\} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to a+\Delta a}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}F(z) = \frac{F^{(s-1)}(a+\Delta a)}{(s-1)!},$$

наоѓаме:

$$I = \oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{F(z)dz}{(z-a)^s} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{2\pi i}{(s-1)!}F^{(s-1)}(a)$$

и

$$I^* = \oint_C f^*(z)dz = \oint_C \frac{F(z)dz}{(z-a-\Delta a)^s} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a+\Delta a} f^*(z) =$$

$$= \frac{2\pi i}{(s-1)!}F^{(s-1)}(a+\Delta a),$$

па

$$|I-I^*| = \frac{2\pi}{(s-1)!}|F^{(s-1)}(a+\Delta a)-F^{(s-1)}(a)| =$$

$$= \frac{2\pi}{(s-1)!}|(F^{(s)}(a)+\varepsilon)\Delta a| \le \frac{2\pi}{(s-1)!}|M+\varepsilon||\Delta a| \approx \frac{2\pi M}{(s-1)!}|\Delta a|$$

при $\varepsilon = o(|\Delta a|)$.

Со други зборови, претходното означува дека при заменување на интегралот $I = \oint_C f(z)dz$ со интегралот $I^* = \oint_C f^*(z)dz$ допуштената грешка е од ред $|\Delta a|$, при што, за таа да не го надминува ε, доволно е полот $z=a$ да биде пресметан со точност

$$|\Delta a| \le \frac{(s-1)!}{2\pi M}\varepsilon.$$

Посебно, во случај на прост пол $z=a$, важи оценката

$$|I-I^*| \le 2\pi M|\Delta a|$$

и тогаш, за грешката на приближното равенство $I \approx I^*$ да не го надминува ε, доволно е полот $z=a$ да биде определен со точност

$$|\Delta a| \le \frac{\varepsilon}{2\pi M}.$$

Во таков случај

$$f^*(z) = \frac{F(z)}{z-a-\Delta a}$$

и

$$|f(z)-f^*(z)|_C = |F(z)|\left|\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-a-\Delta a}\right| =$$

$$= |F(z)|\frac{|\Delta a|}{|z-a||z-a-\Delta a|} \le \frac{L|\Delta a|}{\rho||z-a|-|\Delta a||} = \frac{L\Delta a}{\rho(\rho-|\Delta a|)},$$

каде што $L=\max|F(z)|_C$.

Нека, сега, аналитичната функција $f(z)$ има повеќе полови $z_1=a_1, z_2=a_2, \dots, z_n=a_n$, соодветно со кратност $s_1, s_2, \dots, s_n$ и, значи, можна е факторизацијата

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a_1)^{s_1}(z-a_2)^{s_2}\dots(z-a_n)^{s_n}}$$

каде што $F(z)$ е аналитична функција во точките $z=a_k$ $(k=1,\dots,n)$.

Теорема 2. Ако аналитичната функција $f(z)$ во областа ограничена со контурата C има полови $z_1=a_1, z_2=a_2, \dots, z_n=a_n$ соодветно со кратност $s_1, s_2, \dots, s_n$, чии вредности се определени приближно со точност $\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n$ соодветно, при што точките $z=a_k+\Delta a_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ не излегуваат надвор од земената област, тогаш при

$$f^*(z) = \frac{F(z)}{(z-a_1-\Delta a_1)^{s_1}(z-a_2-\Delta a_2)^{s_2}\dots(z-a_n-\Delta a_n)^{s_n}}$$

важи

$$\left|\oint_C f(z)dz - \oint_C f^*(z)dz\right| \le \frac{2\pi nM}{(s-1)!}\Delta a,$$

каде што M е одреден позитивен број, $\Delta a=\max|\Delta a_k|$, $s=\min s_k$ $(k=1,2,\dots,n)$.

Доказ. Навистина, опишувајќи во контурата C околу секоја точка $z_k=a_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ круг C_k со центар во таа точка и радиус ρ_k таков што во него да се содржи и соодветната точка $z=a_k+\Delta a_k$, а сите други полови да се надвор од него (сл. 1), имаме:

$$I = \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} \frac{F(z)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z-a_\nu)^{s_\nu}}$$

и

$$I^* = \oint_C f^*(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k+\Delta a_k} \frac{F(z)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z-a_\nu-\Delta a_\nu)^{s_\nu}},$$

односно

$$I = \oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_C \frac{F(z)dz}{\prod_{\nu=1}^{n} (z-a_\nu)^{s_\nu}} = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} \frac{F_k(z)}{(z-a_k)^{s_k}}$$

и

$$I^* = \oint_C f^*(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_C \frac{F(z)dz}{\prod_{\nu=1}^{n} (z-a_\nu-\Delta a_\nu)^{s_\nu}} = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} \frac{F_k(z)}{(z-a_k-\Delta a_k)^{s_k}},$$

каде што $F_k(z)$ е аналитична во кругот C_k и на неговата граница. Но, според претходната теорема при

$$f_k(z) = \frac{F_k(z)}{(z-a_k)^{s_k}}, \quad f_k^*(z) = \frac{F_k(z)}{(z-a_k-\Delta a_k)^{s_k}}$$

е

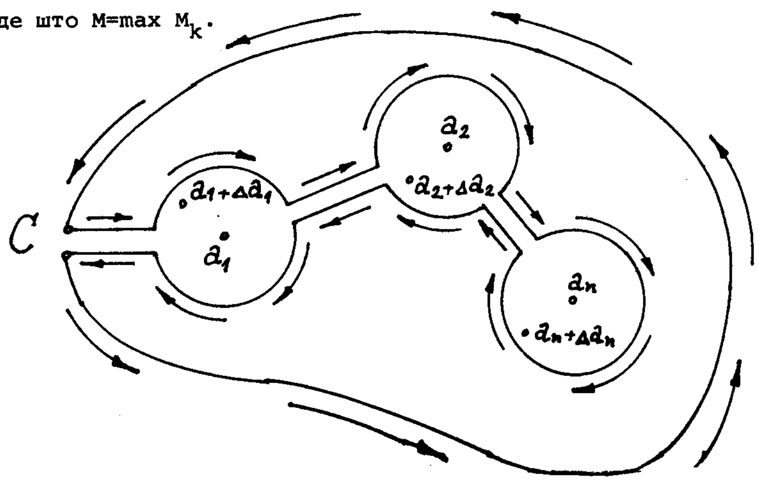
$$\left|\oint_{C_k} f_k(z)dz - \oint_{C_k} f_k^*(z)dz\right| \le \frac{2\pi M_k}{(s_k-1)!}|\Delta a_k|,$$

каде што $M_k = \max|F_k^{(s_k)}(z)|_{C_k}$, па се добива:

$$|I-I^*| = \left|\sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f_k(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f_k^*(z)dz\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left|\oint_{C_k} f_k(z)dz - \oint_{C_k} f_k^*(z)dz\right| \le 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{(s_k-1)!}|\Delta a_k| \le \frac{2\pi n M}{(s-1)!}\Delta a,$$

каде што $M = \max M_k$.



Значи, при заменување на интегралот $I = \oint_C f(z)dz$ со интегралот $I^* = \oint_C f^*(z)dz$ допуштената грешка е од ред $\Delta a = \max|\Delta a_k|$ $(k=1,2,\ldots,n)$ и, за таа да не го надминува ε, доволно е секој пол $z=a_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ да биде определен со точност

$$|\Delta a_k| \leq \frac{(s-1)!}{2\pi nM}\varepsilon .$$

Посебно, во случај кога сите полови $z=a_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ се прости, се добива оценката

$$|I-I^*| \leq 2\pi nM\Delta a$$

и, тогаш, за грешката на приближното равенство $I \approx I^*$ да не го надминува ε, доволно е секој пол $z=a_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ да се земе со точност

$$|\Delta a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi nM}.$$

Пример 1. Ако во интегралот

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{z^n dz}{z-1{,}001},$$

во кој $F(z)=z^n$, се прими $a=1{,}001$, $\Delta a=-0{,}001$ и, значи, $a+\Delta a=1$ тогаш тој може да се замени со интегралот

$$I^* = \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z-1}dz = 2\pi i\ F(1) = 2\pi i$$

со грешка

$$|I-I^*| \leq 2\pi|F'(a)||\Delta a| = 2\pi n(1{,}001)^{n-1}0{,}001.$$

Непосредното пак пресметување дава:

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0{,}001} f(z) = 2\pi i(1{,}001)^n$$

и, значи,

$$|I-I^*| = 2\pi|(1{,}001)^n-1| = 2\cdot 0{,}001\pi n.$$

Пример 2. Во интегралот

$$I = \oint_C \frac{dz}{z^3+z-3}$$

подинтегралната функција ги има за свои полови корените на равенката $z^3+z-3=0$ од кои два се комплексно-коњугирани и еден реален чија вредност со точност 10^{-4} е $z_1=1,2134$. Сметајќи дека контурата C го обиколува само полот z_1, овој интеграл можеме да го замениме со интегралот

$$I^* = \oint_C \frac{dz}{(z-1,2134)(z^2+pz+q)},$$

за кој имаме:

$$I^* = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f^*(z) = 2\pi i \lim_{z\to z_1} (z-z_1)f^*(z) =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1,2134} \frac{z-1,2134}{z^3+z-3} = 2\pi i \left.\frac{1}{3z^2+1}\right|_{z=z_1} = \frac{2\pi i}{5,41701},$$

при што

$$|I-I^*| \le 2\cdot 10^{-4} \max|F'(z)|,$$

каде што

$$F(z) = \frac{1}{z^2+pz+q}$$

треба да се определи.

Пример 3. Интегралот

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x-5}$$

постои во смисла на Кошиева главна вредност. Подинтегралната функција во него за свои полови ги има корените на равенката

$$x^3 + x - 5 = 0,$$

од кои само еден е реален, содржан во интервалот [1,2] и чија вредност со точност 10^{-3} е $x_1=1,515$. Вредноста на интегралот може да се пресмета користејќи го равенството

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}z>0} \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum_{z=x_1} \operatorname{Res} f(z).$$

Тука

$$\operatorname*{Res}_{z=x_1} f(z) = \lim_{z\to x_1} (z-x_1)\frac{1}{z^3+z-5} = \left.\frac{1}{3z^2+1}\right|_{z=x_1},$$

а бидејќи една приближна факторизација дава

$$z^3+z-5 = (z-1,515)(z^2+1,515z+3,300)$$

и во областа $\operatorname{Im}z > 0$ се наоѓа уште само еден пол

$$z_2 = \frac{1}{2}(-1,515+\sqrt{1,515^2-4\cdot 3,300}) = \frac{1}{2}(-1,515+3,300i),$$

при што

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2} (z-z_2)\frac{1}{z^3+z-5} = \left.\frac{1}{3z^2+1}\right|_{z=z_2},$$

добиваме:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x-5} = \frac{2\pi i}{3z_2^2+1} + \frac{\pi i}{3z_1^2+1} =$$

$$= 2\pi i(-0,06346+0,08720i)+0,1268\cdot\pi i =$$

$$= \pi i(-0,1269+17440i+0,1268) \approx -0,174\cdot\pi = -0,546.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Маркушевич, А.И.: Краткий курс теории аналитических функций, Москва, 1961

[2] Mitrinović, D.S.: Kompleksna analiza, Beograd, 1971

[3] Mitrinović, D.S.: Calculus of Residues, Groningen, 1966

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ВЫЧЕТОВ

К. Ациевски, В. Бабинкостов, Д. Димитровски

Р е з ю м е

В работе указываетя на некоторые возможные оценки приближенных значений интегралов, полученных с помощю вычетов в случае приближенных значений полюсов.