Математички Билтен
16 (XLII)
1992 (43-49)
Скопје, Македонија

# SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ARÉOLAIRE LINÉAIRE AUX COÈFICIENTS CONSTANTS

## - L'ÉQUATION ARÉOLAIRE D'EULER -

Dragan Dimitrovski, Borko Ilievski, Miloje Rajović

Abstract. On emploi le methode de l'intégrale définie complèxe sur la résolution des équations aréolaires.

Soit donnée une équation différentielle linéaire aréolaire:

$$a_0(z)\frac{\partial^n W}{\partial \bar{z}^n} + a_1(z)\frac{\partial^{n-1} W}{\partial \bar{z}^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(z)\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + a_n(z)W = 0 \tag{1}$$

avec les dérivations conjuguées $\partial^k/\partial\bar{z}^k$ d'une fonction $W(z,\bar{z})$ analytique de deux variables complèxes $z$ et $\bar{z}$, au coèficients "constants" à l'égard à $\bar{z}$:

$$a_k = a_k(z),\ k=0,1,2,\ldots,n$$

tous étant les fonctions analytiques de la variable complèxe $z = x+iy$.

L'équation (1) a été déja traitée par J. Kečkić [5], par M. Čanak dans son thèse [6], et par V. Gabrinovič [7], où les solution (10) de l'équation (1) sont dites les fonctions méta-analitiques. Dans l'article présent nous ajoutons encore un methode dans le traitement de l'équation (1) - le methode de l'intégrale conjuguée de Laplace, ce qui aura des conséquences fécondes sur les autres types des équations linéaires aréolaires.

Suivant une idée de Hermite [1], reprise dans [2], on va chercher la solution générale de cette équation sous la forme de l'intégrale conjuguée de Laplace

$$W(z,\bar{z}) = \int_{\Gamma(\zeta)} e^{\bar{z}\zeta}\phi(\zeta,z)\,d\zeta \tag{2}$$

qu'on appelera l'intégrale de Laplace aréolaire. $\zeta$ et z étant deux variables complèxes indépendentes, z dans un rôle du paramètre ($\bar{z}$ aussi), $D(\zeta)$ une région dans le plane de $\zeta$, $\Gamma(\zeta)$ son contour, tous les deux d'abord inconnues, il faut les élire de façon que l'intégrale (2) satisfait l'équation (1). Ce sera une idée de la résolution; on verra que ce traitement est assez général, sans l'égard de la forme spécialisée de la solution (2).

Après avoir effectuer les calculus nécessaires, on obtient à partir de (1) et (2) l'identité:

$$\int_{\Gamma(\zeta)} P_n(\zeta,z)e^{\bar{z}\zeta}\phi(\zeta,z)d\zeta = 0 \tag{3}$$

avec

$$P_n(\zeta,z) = a_o\zeta^n + a_1(z)\zeta^{n-1} +\ldots+ a_n(z) \tag{4}$$

un polynome "caractéristique" de deux variables complèxes, où il faut trouver $\Gamma(\zeta)$ et $\phi(\zeta,z)$ pour que (3) soit satisfaite pour tout $z,\bar{z}$.

L'intégrale complèxe est égale à zéro dans les cas suivants:

1°. La fonction sousintégrale est égale à zéro identiquement.

2°. Le contour $\Gamma(\zeta)$ est fermé, la fonction sousintégrale étant analytique et entière dans $\Gamma(\zeta)$.

3°. Le contour $\Gamma(\zeta)$ fermé, $\phi(\zeta,z)$ possède des singularités à l'égard de $\zeta$, mais de façon que le changement tôtal de la fonction après tous les parcours des singularités est égal à zéro.

L'intégrale d'une fonction analytique prise à une ligne ouverte n'est pas égale à zéro.

On peut éxaminer ces cas par l'ordre:

1°. Comme l'on a $e^{\bar{z}\zeta} \neq 0$, on peut prendre dans (3): $\phi(\zeta,z)=0$ mais on a alors à cause de (2): $W(z,\bar{z}) = 0$. C'est à dire on a toujours la solution triviale de l'équation aréolaire (1).

L'identité (3) est remplie si: $P_n(\zeta,z) = 0$, ou

$$a_o(z)\zeta^n + a_1(z)\zeta^{n-1} +\ldots+ a_n(z) = 0$$

C'est une équation algebrique de $\zeta$, z étant un parametre. Elle possède n solutions de $\zeta$: $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n$; ainsi qu'on ait:

$$P_n(\zeta,z) = a_o(z)(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)\dots(\zeta-\zeta_n)$$

où les racines sont

$$\zeta_k = \zeta_k(a_j(z)) = \zeta_k(z), \ k=1,2,\dots,n$$

Pour tout $\zeta = \zeta_k(z)$ l'intégrale (3) est égale a zéro, c'est qui est évident et aussi triviale, mais ce n'est pas la solution, car (3) est satisfaite seulement dans quelques cas de $\zeta$, et pas pour tous $\zeta$.

2°. Après avoir exclu cettes valeurs $\zeta_k$, k=1,2,...,n, on peut élire

$$\phi(\zeta,z) = \frac{1}{P_n(\zeta,z)} \qquad (5)$$

et avec cette valeur on a pour (3):

$$\int_{\Gamma(\zeta)} P(\zeta,z)e^{\overline{z}\zeta} \frac{d\zeta}{P_n(\zeta,z)} = \int_{\Gamma(\zeta)} e^{\overline{z}\zeta}d\zeta = \left.\frac{e^{\overline{z}\zeta}}{\overline{z}}\right|_{\Gamma(\zeta)} = \frac{1}{\overline{z}}\left[e^{\overline{z}\zeta_B}-e^{\overline{z}\zeta_A}\right]$$

Et si $\Gamma(\zeta)$ est un contour ferme, $\zeta_A \equiv \zeta_B$, l'intégrale (3) est zéro et l'équation (1) est donc satisfaite (si $\zeta_k$ ne sont sur $\Gamma(\zeta)$). (5) est donc une solution particulière.

Donc, on a la solution de l'équation (1) donnée par l'intégrale (2)

$$W(z,\overline{z}) = \oint_{\Gamma(\zeta)} \frac{e^{\overline{z}\zeta}}{P_n(\zeta,z)}d\zeta = \oint_{\Gamma(\zeta)} \frac{e^{\overline{z}\zeta}}{a_o(z)(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)\dots(\zeta-\zeta_n(z)}d\zeta \qquad (6)$$

$\Gamma(\zeta)$ étant un contour fermé dans le plan des $\zeta$, sur $\Gamma(\zeta)$ ne se trouve nulle racine $\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n$, aussi dans l'intérieur. Mais alors on a que la fonction sousintègrale est entière; l'intégrale est zéro, et l'on a de nouveau la solution triviale $W(z,\overline{z}) = 0$, c'est qui est déja connu.

3°. Toutes les possibilitiés ici se cachent donc, si les points singuliers $\zeta_k$ sont dans l'intérieur de $\Gamma(\zeta)$, ou même sur $\Gamma(\zeta)$.

Si dans l'intérieur de $\Gamma(\zeta)$ se trouve une seule singularité $\zeta_1$, les autres étant en déhors, on a au moyen d'un calcul des résidus:

$$W(z,\bar{z}) = \oint \frac{e^{\bar{z}\zeta}}{P_n(\zeta,z)} d\zeta = 2\pi i \operatorname*{Res}_{\zeta=\zeta_1} \frac{e^{\bar{z}\zeta}}{P_n(\zeta,z)} =$$

$$= 2\pi i \lim_{\zeta\to\zeta_1} (\zeta-\zeta_1)\frac{e^{\bar{z}\zeta}}{a_0(z)(\zeta-\zeta_1)\dots(\zeta-\zeta_n)} = \frac{2\pi i e^{\bar{z}\zeta_1}}{a_0(z)(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_3)\dots(\zeta_1-\zeta_n)} \tag{7}$$

et si l'on introduit une "constante" (à l'égarde $\zeta$)

$$C(z) = \frac{2\pi i}{a_0(z)(\zeta_1-\zeta_2)\dots(\zeta_1-\zeta_n)} \tag{8}$$

on a dans ce cas la solution

$$W(z,\bar{z}) = C(z)e^{\bar{z}\zeta_1} \tag{9}$$

$C(z)$ ayant la forme concrete (8), c'est alors une intégrale particuliere. Mais on le voit que (9) est la solution pour tout $C(z)$, car si l'on pose $C(z) = C(z)\cdot A(z)$, $C$ étant la valeur concrète (8), $A(z)$ une fonction analytique arbitraire de $z$, (9) satisfait (1). (9) est donc une solution particulière pour tout $C(z)$.

Si le contour $\Gamma(\zeta)$ contient deux singularités de la fonction (5): $\zeta_1$ et $\zeta_2$, on a suivant un même calcul des résidus:

$$W(z,\bar{z}) = 2\pi i\cdot \sum_{\zeta_1,\zeta_2} \operatorname{Res}\Phi(\zeta,z) =$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^{\bar{z}\zeta_1}}{a_0(\zeta_1-\zeta_2)\dots(\zeta_1-\zeta_n)} + \frac{e^{\bar{z}\zeta_2}}{(\zeta_2-\zeta_1)\dots(\zeta_2-\zeta_n)}\right],$$

ainsi que l'on a la solution particuliere dans ce cas:

$$W(z,\bar{z}) = C_1(z)e^{\bar{z}\zeta_1} + C_2(z)e^{\bar{z}\zeta_2}$$

Il est évident qu'il faut élire $\Gamma(\zeta)$ de façon qu'elle possède dans son interieur <u>tous</u> $\zeta_k$.

Alors, on peut formuler le théoreme suivant:

<u>Théoreme</u>. L'equation aréolaire (1)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^{n-k}W}{\partial \bar{z}^{n-k}} = 0, \quad a_k = a_k(z)$$

a toujours une solution générale <u>analytique</u> sous la forme de l'intégrale de Laplace conjuguée (2), si l'on élut $\phi(\zeta,z)$ dans la forme (5), (4); $\Gamma(\zeta)$ étant un contour fermé dans le plane de $\zeta$, qui contient <u>tous les zéros</u> $\zeta_k$ de $P_n(\zeta,z)$:

$$W(z,\bar{z}) = \oint_{\Gamma(\zeta)} \frac{C(z)}{P_n(\zeta,z)} e^{\bar{z}\zeta} d\zeta \tag{10}$$

ou, apres un calcul des résidus

$$W(z,\bar{z}) = \sum_{k=1}^{n} C_k(z) e^{\bar{z}\zeta_k(z)}$$

$C(z)$, $C_k(z)$, étant les "constantes" arbitraires.

Ce théoreme constitue l'idée essentielle de cet article. Les solutions particulieres $W_k$ sont défines avec $\Gamma(\zeta)$ autour une, deux, etc. points particuliers $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$, $k < n$. Si quelques $\zeta_k$ sont égaux entre eux: $\zeta_i = \zeta_j$, on peut ausii construire les solutions en un manière analogue au precédent, de façon que l'on ait des fonctions méta-analytiques, et particulièrement, si tous les $\zeta_k$ sont égaux entre eux, on a une fonction poli-analytique.

Cette idée possède une largeur au sens qu'on peut prendre $\zeta_k$ sur $\Gamma(\zeta)$, (la valeur principle), et dans le cas si le calcul des résidus n'est pas si clair et facile.

Les conséquences sur les équations différentielles réelles sont évidentes et connues.

Les problemes aux limites relatifs à l'équation (1) sont déterminés par les conditions aux limites du type de Riemann, Hilbert, Carleman (pour cela il faut consulter aussi la these [6]), mais ça dépasse les limites de cet article.

L'équation aréolaire de Euler. Si, suivant la même analogie, on définit l'équation aréolaire de Euler

$$a_0(z)\bar{z}^n \frac{\partial^n W}{\partial \bar{z}^n} + a_1(z)\bar{z}^{n-1} \frac{\partial^{n-1} W}{\partial \bar{z}^{n-1}} + \ldots + a_n(z)W = 0 \tag{11}$$

les $a_k(z)$ étant aussi analytiques; on cherchera de même la solution sous la forme (2), et l'on obtiendra

$$\int_{\Gamma(\zeta)} \left[a_0(z)(\bar{z}\zeta)^n + a_1(z)(\bar{z}\zeta)^{n-1} + \ldots + a_n(z)\right] e^{\bar{z}\zeta} \phi(\zeta,z) d\zeta = 0 \tag{12}$$

Si l'on pose $\bar{z}\zeta = t$, on réduit cela au probleme précédent. Posant

$$P_n(\bar{z}\zeta,z) = \sum_{k=o}^{n} a_k(z)(\bar{z}\zeta)^{n-k} = \sum_{k=o}^{n} a_k z^{n-k} = P_n(t)$$

on a ses zéros: $t_1, t_2, \ldots, t_n$: $t_i(a_k(z))$ et respectivement

$$\zeta_i = \zeta_i(t) = \frac{t_i(a_k(z))}{\bar{z}} \qquad (13)$$

ainsi que la décomposition

$$P_n(t) = a_o(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_n)$$

donne

$$P_n(\bar{z}\zeta,z) = a_o(z)\bar{z}^n(\zeta-\zeta_1)\ldots(\zeta-\zeta_n) \qquad (14)$$

ainsi que l'équation aréolaire de Euler (11) s'écrive

$$\int_{\Gamma(\zeta)} P_n(\bar{z}\zeta,z)e^{\bar{z}\zeta}\phi(z,\zeta)d\zeta = 0 \qquad (15)$$

où il faut élire maintenant $\phi(\zeta,z)$ et $\Gamma(\zeta)$. Si l'on pose

$$\phi(\zeta,z) = \frac{C(z)}{P_n(\bar{z}\zeta,z)} = \frac{C(z)}{a_o(z)\bar{z}^n(\zeta-\zeta_1)\ldots(\zeta-\zeta_n)} \qquad (16)$$

on a

$$W(z,\bar{z}) = \int_{\Gamma(\zeta)} e^{\bar{z}\zeta} \frac{C(z)d\zeta}{a\ (z)\bar{z}^n(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)\ldots(\zeta-\zeta_n)} \qquad (17)$$

et si l'on suppose que $\Gamma(\zeta)$ contient tous les points isolés $\zeta_k$, on aura de même les intégrales particulieres

$$\frac{C_1(z)}{\bar{z}^n}e^{\bar{z}\zeta_1(z)}, \frac{C_2(z)}{\bar{z}^n}e^{\bar{z}\zeta_2(z)}, \ldots, \frac{C_n(z)}{\bar{z}^n}e^{\bar{z}\zeta_n(z)} \qquad (18)$$

ainsi que l'on ait la solution générale de l'équation aréolaire d'Euler:

$$W(z,\bar{z}) = \frac{1}{\bar{z}^n}\sum_{k=1}^{n} C_k(z)e^{\bar{z}\zeta_k(z)} \qquad (19)$$

sous la supposition de l'analyticité de $W(z,\bar{z})$. $\zeta_k(z)$ sont les racines de l'équation caractéristique (4), $C_k(z)$ les fonctions arbitraires à l'égard de z, les constantes généralisées.

L I T T E R A T U R E

[1] Hermite, C.: Équations différentielles linéaires, Bulletin des Sciences Math., II-ième série, tome III, 1879, 311-325

[2] Darboux: Note adjointe; le même, 326

[3] Mitrinović, D.S., Kečkić, J.D.: Košijev račun ostataka, Beograd, Mat. problemi i ekspozicije

[4] Смирнов, В.И.: Курс математического анализа, Том III/2, Москва, 1965, 387

[5] Kečkić, J.D.: O jednoj klasi parcijalnih jednačina, Matematički Vesnik SR Srbije, 6(21), 1969, 71-73

[6] Čanak, M.: Metode diferencijalnih i funkcionalnih jednačina za rešavanje nekih tipova konturnih problema, Teza, PMF, Beograd, 1977

[7] Габринович, В.: О краевой задаче типа Карлемана для мета-аналитический функций, Доклады АН БССР, 1977, т. XXI, N$^{o}$ 2, 112-115

## ЗА АРЕОЛАРНАТА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА СО "КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ" - ЗА АРЕОЛАРНАТА EULER-ОВА РАВЕНКА -

Драган Димитровски, Борко Илиевски, Милоје Рајовиќ

Р е з и м е

Методот на определениот интеграл од обичните диференцијални равенки, благодарение на една идеја на Ермит и Дарбу, се пренесува на комплексните диференцијални равенки со конјугирани изводи од непознатата функција $W(z,\bar{z})$. Се решава ареоларната равенка со "константни" коефициенти (т.е. равенка чиишто коефициенти се обични аналитични функции по $z=x+iy$), како и Ојлеровата ареоларна равенка, во форма на контурен интеграл од една комплексна променлива, додека втората е во форма на параметар. Можни се и генерализации.