Мат. Бил. 7-8 (XXXIII-XXXIV),
1983-1984, (25-35),
Скопје, Југославија

L A N D O   D E G O L I

Dipartimento di Matematica dell' Universita di Modena (Italia)

UN THÉORÈME SUR LES VARIÉTÉS BASES DES SYSTÈMES LINÉAIRES DE QUADRIQUES A JACOBIENNE INDÉTERMINÉE

1980 Mathematics Subject Classification:
Primary: 51-XX GEOMETRY
Secondary: 51-N-15 Projective analytic geometry
Keywords and phrases: Quadric, linear system of quadrics

RÉSUMÉ:

On démontre que la variété base d'un système linéaire quadriques de S_r a Jacobienne de caractéristique r-k est: un S_k double, ou une variété réductible, qui possède deux variété rationnelles, on une variété rationnelle irréductible. Après on donne des exemples significatifs.

1 - Dans l'espace linéaire S_r de coordonnées projectives homogènes x_i $(i=0,1,2,\ldots\ldots,r)$, choisissons d+1 quadriques linéairement indépendantes:

$$f_q = \sum_{i=k=0}^{r} a_q^{ik} x_i x_k \quad (q = 0,1,\ldots\ldots,d)$$

Le systèmes linéaire L_d de dimension d, qui en résulte, est exprimé par l'equation:

$$\sum_{q=0}^{d} \Lambda_q f_q = 0$$

Supposons que la matrice Jacobienne à r+1 lignes et d+1 colonnes:

$$J = \left\| \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \right\| \qquad \begin{pmatrix} q = 0,1,2,\ldots\ldots,d \\ i = 0,1,2,\ldots\ldots,r \end{pmatrix}$$

soit à caractéristique $m = r-k$.

Si la matrice Jacobienne est identiquement nulle cela signifie que tout l'espace est le liue de points conjugués par rapport à toutes les quadriques du systèmes. Si la caractéristique est $r-h$ $(h \geq 0)$ un point générique de S_r est conjugué avec un S_h.

Donnés deux systèmes linéaires L_a et L_b, qui ont en commun un système linéaire L_c, leur système-union résulte de dimension $a+b-c$.

Nous dirons que le systeme $L_{d/m}$ $(m \leq d)$ de dimension d et à Jacobienne de caractéristique m est réductible, lorsqui' il est l'union de systèmes subordonnés, parmi les quels au moins un $L_{g/c}$ $(c \leq g)$ n'a pas des quadriques en commun avec les autres. Autrement dit, il serà nommé: irréductible.

Il existe le:

THÉORÈME

La variété base d'un système linéaire irréductible de quadriques $L_{d/r}$ $(r-k \leq d)$ de S_r est seulement une des variétés suivantes:

1°) <u>Un S_k double et, dans ce cas, les quadriques sont des S_k-cônes avec S_k-sommet en commun;</u>

2°) <u>Une variété réductible, qui possède deux variétés rationnelles de dimensions h et r-h+k-1 ($1 \leq h \leq r-2$);</u>

3°) <u>Une variété rationnelle irréductible de dimension</u> $\frac{r-k-1}{2}$.

D É M O N S T R A T I O N:

Prénons en considération le cas particulier: $k=0$. Soit le système linéaire irréductible de quadriques $L_{d/r}$ ($r \leq d$) de S_r.

Pour un théorème connu (voir: [5] et [8]) les quadriques de L_d, qui passent par un point générique $\underline{P}$ de S_r, ont en commun une droite, qui résulte corde de la variété base $\underline{V}$ du système.

Soit $\underline{R}$ le complexe des droites constitué par toutes les cordes de $\underline{V}$, qui, a cause du théorème cité, remplissent tout S_r.

Entrecoupons ce complexe par un hyperplan S_{r-1}. Chaque droite du complexe sera entrecoupée dans un point. Il est ainsi possible établir une corrispondance biunivoque parmi les points de l'hyperplan et les droites du complexe $\underline{R}$.

Pour cela le complexe $\underline{R}$ est rationnel.

Supposons que les quadriques aient en commun un point double $\underline{A}$. Il en résulte que toutes les droites, qui sortent de $\underline{A}$, sont cordes de la variété constituée par le point $\underline{A}$. Elles remplissent tout S_r et évidemment elles forment un complexe rationnel.

Les quadriques ne peuvent pas avoir un autre point double $\underline{B}$ en commun, autrément dît par un point générique $\underline{P}$ ils passeraient plus qu'une corde: la droite $\underline{PA}$ et la droite $\underline{PB}$.

Par conséquent la caractéristique de la Jacobienne serait $\underline{<r}$, contre l'hypotèse.

Il s'ensuit que les quadriques sont des cônes avec S_o-sommet en commun.

'Hors de ce cas, puisque $\underline{R}$ est rationnel, il en résulte que les coordonnées de droite de ses droites, les p_{ik}, c'est à dire les mineurs extraits de la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_r \\ y_0 & y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_r \end{matrix} \right\| , \qquad (1)$$

sont fonctions rationnelles de $r-1$ paramètres indépendants.

Nous pouvons indiquer avec $M\ (x_0, x_1, \ldots\ldots, x_r)$ et $N\ (y_0, y_1, \ldots\ldots, y_r)$ deux points quelconques de la variété base et avec MN la corde qui les joint.

Si la variété base est réductible, il existera dans elle deux variétés subordonnées W et Z de dimensions réspectives h et $r-h-1$ $(1 \leq h \leq r-2)$. On réjette le cas $h=0$ et $h=r-1$ parce-que dans ce cas les quadriques contiennent au moins un hyperplan. Donc elles résultent couples d'hyperplans ayants un hyperplans en commun.

Les autre hyperplans de la couple devraient possèder un S_0: il en résulte que leur nombre est ∞^{r-1}. Pour cela le système de quadriques aurait dimension $d=r-1$, contre l'hypothese qu'il soit $r \leq d$.

Les variétés W et Z ont les dimensions citées parce-que, en projetant W par un point générique P on obtient une variété T de dimension $h+1$, qui entrecoupe Z seulement dans un point Q externe à la variété intersection de W avec Z.

En effet, en résultant la droite PQ corde de V, seulement dans ce cas P résulte conjugué avec un seul point par rapport à toutes les quadriques du systeme.

Notons:

$$x_0 = 1,\ x_1 = \Phi_1\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_h),\quad x_2 = \Phi_2\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_h), \ldots$$
$$\ldots\ldots, x_r = \Phi_r\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_h)$$

les equations paramétriques de W.

On peut indiquer celles de Z avec:

$$y_0 = 1,\ y_1 = \Psi_1(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{r-h-1}),\ y_2 = \Psi_2(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{r-h-1}),$$
$$, \ldots\ldots, y_r = \Psi_r(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{r-h-1})$$

Les premiers r p_{ik}, extraits de la matrice (1) résultent:

$$\begin{aligned} P_{o1} &= \Psi_1 - \Phi_1 \\ P_{o2} &= \Psi_2 - \Phi_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ P_{or} &= \Psi_r - \Phi_r \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les différences:

$$\Psi_i - \Phi_i \quad (i=1,2,\ldots\ldots,r)$$

doivent résulter rationnelles dans les paramètres α_m, β_n. Pour cela l'éventuelle partie irrationnelle de Ψ_i et Φ_i doit s'eclisser par différence.

On en déduit que:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= C_i + E_i \\ \Psi_i &= D_i + E_i \end{aligned} \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,r)$$

ou C_i et D_i sont fonctions rationnelles et E_i est l'éventuelle parti irrationelle de Φ_i et Ψ_i.

Fixons un point $\underline{M}$ sur $\underline{W}$: ils sont individualisés $C_i = C$ et $E_i = E$ (C et E = constantes).

En variant le point $\underline{N}$ sur $\underline{Z}$, il s'ensuit que, pour que la difference $\Psi_i - \Phi_i$ résulte toujours rationnelle, il faut que E_i soit toujours égal a E, c'est à dire: E_i = constant. Analoguement, si nous ténons fixé Ψ_i et faisons varier Φ_i sur $\underline{W}$, on obtient le même résultat.

Mais si E_i è constant dans les deux variétés, il n'est plus irrationnel.

Pour cela Φ_i e Ψ_i sont rationnelles, comme il fallait démontrer.

Supposons maintenant que $\underline{V}$ soit irréductible. Si $\underline{h}$ est sa dimension, puisque ses corde sont $\underline{\infty^{2h}}$ chaque corde possède $\underline{\infty^1}$ points, il devra être:

$$2h - 1 = r$$

c'est à dire:

$$h = \frac{r-1}{2}$$

Il s'ensuit que $\underline{r}$ est nécessairement impair.

En répétant le raisonnement, que nous avons fait précedemment, choisissons deux point M $(x_0, x_1, \ldots\ldots, x_r)$ et N $(y_0, y_1, \ldots\ldots, y_r)$ sur cette variété.

Écrivons les équations de $\underline{V}$ en forme paramétrique:

$$x_0 = 1,\quad x_1 = \Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{\frac{r-1}{2}}),\quad x_2 = \Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{\frac{r-1}{2}}), \ldots$$
$$\ldots\ldots, x_r = \Phi_r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{\frac{r-1}{2}})$$

$$y_0 = 1,\quad y_1 = \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{\frac{r-1}{2}}),\quad y_2 = \Phi_2(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{\frac{r-1}{2}}), \ldots$$
$$\ldots\ldots, y_r = \Phi_r(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{\frac{r-1}{2}}).$$

Les premiers p_{ik} résultent:

$$p_{01} = \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{\frac{r-1}{2}}) - \Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{\frac{r-1}{2}})$$
$$p_{02} = \Phi_2(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{\frac{r-1}{2}}) - \Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{\frac{r-1}{2}})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_{0r} = \Phi_r(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{\frac{r-1}{2}}) - \Phi_r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{\frac{r-1}{2}})$$

En répétant les considéreations précédentes, nous pouvons fixer le point $\underline{M}$ et par conséquent le $\Phi_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{\frac{r-1}{2}})$ et faire varier le point $\underline{N}$ sur toute la variété.

Par le raisonnement précedent, puisque les p_{0k} $(k=1,2,\ldots,r)$ résultent rationnels, les Φ_i aussi seront rationnelles, comme il fallait démontrer.

Soit maintenant le système $L_{d/r-1}$ $(r-1 \leq d)$ irréductible. Intercoupons ce système par un hyperplan. Pour un théorème bien connu de TERRACINI (voir: [2]), on obtient un système de quadriques irréductible de S_{r-1} ayant le meme dimension et la même caractéristique.

Notons ce systeme par $L'_{d/r-1}$. Puisque l'espace qui le contient a dimension $\underline{r-1}$, ce systeme satisfait à la démonstration précédente et sa variété est une des suivantes:

1°) un point double de S_{r-1};

2°) une variété réductible de S_{r-1}, qui possède deux variété rationnelles de dimension $\underline{h_1}$ et $\underline{r-h_1-2}$ $\underline{(1 \leq h_1 \leq r-3)}$;

3°) une variété irréductible de S_{r-1} de dimension $\frac{r-2}{2}$ (r = nombre pair).

Telles variétés sont evidemment les sections hyperplanes de la variété base du systeme $L_{d/r-1}$.

Puisque on obtient tel résultat par un S_{r-1} quelconque, il s'ensuit que la variété base de $L_{d/r-1}$ est une des suivantes:

1°) une droite double de S_r.

(En effet un hyperplan générique de S_r coupe dans un seul point double seulement une droite double).

2°) Une variété réductible, qui possède deux variétés rationnelles de dimension: $\underline{h=h_1+1}$ et $\underline{r-h=r-h_1-1}$.

(Les variétés doivent être nécessairement rationnelles parce que leur sections avec un hyperplan générique sont rationnelles. Si, en effet, une seule coordonnée, par exemple $x_m = \Phi_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots, \alpha_{h+1})$ était fonction irrationnelle des paramètres, la section hyperplane $x_s = 0$ $\underline{(s \neq m,\ 0 \leq s \leq r)}$ serait irrationnelle, contre la démonstration précédente.

Les dimensions de cette variété sont evidemment $\underline{h_1+1}$ et $\underline{r-h_1-1}$, pour que les sections hyperplanes résultent de dimensions $\underline{h_1}$ et $\underline{r-h_1-2}$).

3°) Une variété rationnelle irréductible de dimension $\frac{r}{2}$ (cette variété doit être rationnelle pour les même motifs susdits et elle doit avoir dimension $\frac{r}{2}$, pourque la section hyperplane ait dimension $\frac{r-2}{2}$).

Soit maintenant le systeme $L_{d/r-2}$ $(r-2 \leq d)$. En sectionnant ce système avec un hyperplan, on obtient un système $L'_{d/r-2}$ $(r-2 \leq d)$ de S_{r-1}, qui par rapport a S_{r-1}, se trouve dans les mêmes conditions du système $L_{d/r-1}$ par rapport à S_r. Pour cela ils seront valides les conclusions précédentes et la variété base de $L_{d/r-2}$ sera une des suivantes:

1°) Un plan double;

2°) une variété réductible, qui possède deux variétés rationnelles de dimension $\underline{h}$ et $\underline{r-h+1 = r-h+2-1}$;

3°) une variété rationnelle irréductible de dimension $\frac{r+1}{2}$ ($\underline{r}$ = nombre impair).

Soit maintenant le système $L_{d/r-3}$ ($r-3 \leq d$). En sectionnant ce système par un hyperplan et en répétant le raisonnement précedent on trouvera que la variété base sera une des suivantes:

1°) Un S_3 double;

2°) une variété réductible, qui possède deux variétés rationnelles de dimension $\underline{h}$ et $\underline{r-h+2 = r-h+3-1}$;

3°) une variété rationnelle irréductible de dimension $\frac{r+2}{2}$ ($\underline{r}$ = nombre pair).

Ainsi poursuivant il est évident qu'on pervient a démontres le théorème.

2 - Donnons maintenant des exemples significatifs.

1°) Dans S_5 il existe un système linéaire de quadriques $L_{5/5}$, dont la variété base est constituée par une V_2^3 rationnelle de S_4 et par un plan, ayant en commun avec la V_2^3 une génératrice.

Les équations canoniques de V_2^3 sont:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}, \qquad x_5 = 0$$

celles du plan:

$$x_0 - x_1 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0, \quad x_5 = 0$$

Et le système devient:

$$\Lambda_0(x_0x_2 - x_1^2) + \Lambda_1(x_0x_4 - x_1x_3) + \Lambda_2(x_1x_4 - x_2x_3) +$$

$$+ \Lambda_3(x_0 - x_1)x_5 + \Lambda_4(x_1 - x_2)x_5 + \Lambda_5(x_3 - x_4)x_5 = 0$$

2°) Si la V_2^3 se casse dans une quadrique de S_3 et dans un plan de S_4 d'équations:

$$x_0 - x_1 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_5 = 0,$$

qui possède en commun une génératrice avec la quadrique:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_2}{x_3} \qquad x_4 = x_5 = 0 \tag{2}$$

on obtient trois quadriques de S_4:

$$x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \quad x_4(x_0-x_1) = 0, \quad x_4(x_2-x_3) = 0$$

Nous pouvons considérer un plan de S_5, qui a en commun avec V_2^3 dégénérée, c'est à dire avec la quadrique (2), un'autre génératrice:

$$x_0 - x_2 = 0, \quad x_3 - x_1 = 0, \quad x_4 = 0$$

et de cette manière on obtient le système linéaire de S_5:

$$\Lambda_0(x_0x_3 - x_1x_2) + \Lambda_1(x_0 - x_1)x_4 + \Lambda_2(x_2 - x_3)x_4 +$$
$$+ \Lambda_3(x_0 - x_3)x_5 + \Lambda_4(x_3 - x_4) + \Lambda_5\, x_4x_5 = 0$$

qui est un $L_{5/5}$ de S_5.

3°) Dans S_6 considérons le système linéaire $L_{5/5}$ de S_6:

$$\Lambda_0(x_0x_3 - x_1x_2) + \Lambda_1(x_0x_5 - x_1x_4) + \Lambda_2(x_2x_5 - x_3x_4) +$$
$$+ \Lambda_3x_1x_6 + \Lambda_4x_3x_6 + \Lambda_5x_5x_6 = 0$$

qui a pour base la V_3^4 rationnelle de S_5:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5}, \quad x_6 = 0$$

et l' S_3 d'équations:

$$x_1 = x_3 = x_5 = 0,$$

ayant en commun avec la V_3^4 le plan:

$$x_0 = x_1 = x_3 = x_5 = 0$$

Si d'un point $\underline{P}$ nous projéctons S_3 nous obténons un S_4, qui coupe la V_3^4 dégénérée, constituée par une V_1^3, qui se trouve sur le plan intersection et par une droite $\underline{s}$. Le point $\underline{P}$ e la droite $\underline{s}$ individualisent un plan de cordes de la variété base, qui sorte de $\underline{P}$. Pour cela la caractéristique du système est: $\underline{6 - 1 = 5}$.

4°) Considérons la variété de Segre individualisée par les couples des points de deux plans de S_5:

$$y_{op} = x_o x_p \qquad y_{1p} = x_1 x_p \qquad y_{2p} = x_2 x_p \qquad (p = 3,4,5)$$

En éliminant x_o, x_1, x_2, x_p, on obtient les équations:

$$\begin{aligned} y_{ok}\, y_{1h} - y_{oh}\, y_{1k} &= 0 \\ y_{ok}\, y_{2h} - y_{oh}\, y_{2k} &= 0 \qquad (k \neq h = 3,4,5) \\ y_{1k}\, y_{2h} - y_{1h}\, y_{2k} &= 0 \end{aligned}$$

Il s'agît de neuf quadriques de S_8, qui forment un système $L_{8/7}$, dont la variété base est donnée par:

$$\frac{y_{03}}{y_{04}} = \frac{y_{13}}{y_{14}} = \frac{y_{23}}{y_{24}}; \quad \frac{y_{03}}{y_{05}} = \frac{y_{13}}{y_{15}} = \frac{y_{23}}{y_{25}}; \quad \frac{y_{04}}{y_{05}} = \frac{y_{14}}{y_{15}} = \frac{y_{24}}{y_{25}} \tag{3}$$

Les équations parametrique de cette variété sont:

$$y_{03} = 1, \quad y_{13} = \mu, \quad y_{23} = \nu, \quad y_{04} = \eta, \quad y_{14} = \mu, \quad y_{24} = \nu\eta,$$
$$, \quad y_{05} = \theta, \quad y_{15} = \mu\theta, \quad y_{25} = \nu\theta.$$

Il s'agît d'une V_4, par shaque point de S_8 ils passent $\underline{\infty^1}$ cordes de cette variété contenues dans un plan. Donc la caractéristique du système est [7].

5°) Le précédent système en génère un autre. Si aux trois groups de fractions (3) on égalise respéctivement les rapports suivants:

$$\frac{y_{33}}{y_{34}}, \quad \frac{y_{33}}{y_{35}}, \quad \frac{y_{34}}{y_{35}}$$

On obtient un L_{17} de S_{11}, qui a pour base une V_5^{10} de S_5, qui résulte une variété de Segre, individualisée par les couples de points d'un S_2 et d'un S_3 de S_6.

La caractéristique du système est 11 et par un point $\underline{P}$ de S_{11} il passe une seule corde de la variété base.

B I B L I O G R A P H I E

[1] G. BONFERRONI: "Sui sistemi lineari di quadriche la cui jacobiana ha dimensione irregolare". R.Acc.Scienze Torino vol. 50. 1914-15.

[2] A. TERRACINI: "Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varieta". Atti S.Acc.Sc.Torino Nota 11,51 (1916) III, 55, 1919-20.

[3] L. MURACCHINI: "Sulle varietà V_s i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria". (parte II) Riv.Mat. Univ. Parma, 3, 75-89 (1952).

[4] S. XAMBO': "On projectives varietes of minimal degrée". Collectanea Mathematica - Barcelona - 1981 - vol. XXXII.

[5] L. DEGOLI: "Un théorème sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indeterminée". Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica - Budapest. Tomo 17 (1982), 325 - 330.

[6] L. DEGOLI: "Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla". Collectanea Mathematica - Barcelona - 1982 vol. XXXIII.

[7] L. DEGOLI: "Trois nouveaux théoremes sur les systemes linéaires de quadriques a Jacobienne identiquement nulle". Demonstratio Mathematica - Warszawa - N° 3 Vol.16 - 1983.

[8] L. DEGOLI: "Alcuni teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla". Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation - Cluj-Napoca. Tome 29(49) N° 1 - 1984 p.p. 33-43.

Adresse: Prof. LANDO DEGOLI
Via Berengario n° 82/C
41012 CARPI (Modena) Italy