ДВЕ ТЕОРЕМЕ ИЗ ТЕОРИЈЕ ПОЛИНОМА

Јован В. Малешевић

(Саопштено 6. октобра 1972. год. у Мат. инст. у Београду)

У овом раду дате су: теорема 1, а затим лема и теорема 2 и њихове последице, која генералишу резултате *Н.* Петърчев-а и Т. Котев-а из теореме 3 у раду [3], и уз њих резултат Талбот-а и Валтера-а [4].

Теорема 1. Нека је дат полином

$$T_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} \tag{1}$$

Ако је

$$f^{(n-1)}(x)\geqslant f^{(n)}(a),\quad x\in[a,\ a+\delta] \tag{2}$$

при чему идентичка једнакост нема места ни на једном размаку сегмента $[a,\ a+\delta]$ *тада важи*

$$f(x)>T_{n-1}(x),\quad x\in(a,\ a+\delta] \tag{3}$$

За елучај

$$f^{(n-1)}(x)\leqslant f^{(n)}(a),\quad x\in[a-\delta,\ a] \tag{4}$$

пак имамо

$$f(x)>T_{n-1}(x)\in[a-\delta,\ a);\ n-1 \text{ — непаран број} \tag{5}$$

и

$$f(x)<T_{n-1}(x),\ x\in[a-\delta,\ a);\ n\text{-}1 \text{ — паран број} \tag{6}$$

За случај супротних знакова у претпоставкама добијају се супротни знакови и у закључцима.

Доказ. Из

$$T_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} \tag{7}$$

следује да је

$$f^{(k-1)}(a)=T_{n-1}^{(k-1)}(a);\quad k=1,\ 2,\ldots,\ n$$

По претпоставци је

$$f^{(n-1)}(x)\geqslant f^{(n)}(a)=T_{n-1}^{(n-1)}(x),\ x\in[a,\ a+\delta] \tag{8}$$

тј.

$$f^{(n-1)}(x)\geqslant T_{n-1}^{(n-1)}(a),\ x\in[a,\ a+\delta] \tag{9}$$

па користећи (8) за $k=n-1$ добијамо. према теореми [1], да је

$$f^{(n-2)}(x)>T_{n-1}^{(n-2)}(x),\quad x\in(a,\ a+\delta] \tag{10}$$

Користећи даље (10) и једнакост (8) за $k=n-2$ поново по теореми [1] следује

$$f^{(n-3)}(x)>T_{n-1}^{(n-3)}(x),\quad x\in(a,\ a+\delta]$$

итд. што доводи до закључка (3).

За случај

$$f^{(n-1)}(x)\leqslant f^{(n-1)}(a),\quad x\in[a-\delta,\ a]$$

имамо да је

$$f^{(n-1)}(x)\leqslant f^{(n-1)}(a)=T_{n-1}^{(n-1)}(x),\quad x\in[a-\delta,\ a]$$

и према (8): $f^{(n-2)}=T_{n-1}^{(n-2)}(a)$, па по теореми [1] сада следује

$$T_{n-1}^{(n-1)}(x)<f^{(n-1)}(x),\quad x\in[a-\delta,\ a] \tag{11}$$

Користећи (11) и (8) за $k=n-2$, поновном применом теореме [1] добијамо

$$f^{(n-2)}(x)<T_{n-1}^{(n-2)}(x),\quad x\in[a-\delta,\ a] \tag{12}$$

и настављајући тако, долазимо до

$$T_{n-1}(x)<f(x),\quad x\in[a-\delta,\ a] \tag{13}$$

ако је $n-1$ непаран број; и

$$f(x) < T_{n-1}(x), \quad x \in [a-\delta, \ a] \tag{14}$$

ако је $n-1$ — паран број.

Овим је доказ теореме завршен.

Лема. За функцију

$$f_{p,q}(t) = (t-x)^p (t-x_0)^q; \quad p \in N, \ q \in Re \lambda q \geqslant 0 \tag{15}$$

важи

$$J_{p,q} = \int_{x_0}^{x} f_{p,q}(t)\,dt =$$

$$= f_{p,q}\left(\frac{\lambda x_0 + x}{1+\lambda}\right) \frac{(1+\lambda)^{p+q}}{\lambda^p} \frac{p\,!}{(q+1)(q+2)(q+p+1)}(x-x_0) \tag{16}$$

ıge je $\lambda \in Re^{+}$.

Доказ. Полазећи од формуле Cauchy-a [2]:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x}}_{p+1-put} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{p!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^p \varphi(t)\,dt, \ p \in N$$

добијамо за

$$\varphi(t) = (t-x_0)^q, \quad q \in Re \lambda q \geqslant 0$$

да је

$$J_{p,q} = \int_{x_0}^{x} (t-x)^p (t-x_0)^q\,dt = \frac{(-1)^p\,!\ (x-x_0)^{p+q+1}}{(q+1)(q+2)\ldots(q+p+1)} (p \in N, \ q \geqslant 0) \tag{18}$$

Деобом сегмента $[x_0, \ x]$ у односу

$$\frac{x-t}{t-x_0} = \lambda, \quad \lambda \in Re^{+} \tag{19}$$

за функцију (15) добијамо да је

$$f_{p,q}\left(\frac{\lambda x_0 + x}{1+\lambda}\right) = (-1)^p \frac{\lambda^p}{(1+\lambda)^{p+q}} (x-x_0)^{p+q} \tag{20}$$

па користећи (2) из (8) следује (16).

Последица. Важи

$$J_{p,q}=P_{p,q}\left(\frac{\lambda x_0+x}{1+\lambda}\right)\frac{(1+\lambda)^{p+q}}{\lambda^p}\,\frac{p\,!\;q\,!}{(p+q+1)\,!}(x-x_0)\,(p\in N,\quad q\in N\,U\{0\},\ \lambda\in Re) \tag{21}$$

што следује из (16), где је према (20):

$$P_{p,q}\left(\frac{\lambda x_0+x}{1+\lambda}\right)=(-1)^p\frac{\lambda^p}{(1+\lambda)^{p+q}}(x-x_0)^{p+q}\,(p\in N,\ q\in N\,U\{0\}) \tag{20'}$$

Специјално за $\lambda=1$ и $q\in N$ из (21) добијамо да је

$$J_{p,q}=P_{p,q}\left(\frac{x_0+x}{2}\right)\frac{(2\,p)\,!\,!\;(2\,q)\,!\,!}{(p+q+1)\,!}(x-x_0);\ p,\ q\in N \tag{22}$$

што за $q=p$ даје

$$J_{p,p}=P_{p,p}\left(\frac{x_0+\lambda}{2}\right)\frac{[(2\,p)\,!\,!]^2}{(2\,p+1)\,!}(x-x_0);\ p\in N \tag{22'}$$

Резултати (22) и (22′) су резултати *Н.* Петърчев-а и Т. Катев-а [3] из којих следују резултати Талбот-а и Walter-а [4] као специјални случајеви:

$$J_{1,1}=\frac{2}{3}P_{1,1}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)(x-x_0)\,(p=q=1) \tag{23}$$

и

$$\begin{cases} J_{1,2}=\dfrac{2}{3}P_{1,2}\left(\dfrac{x+x_0}{2}\right)(x-x_0)\ (p=1,\ q=2)\\[2ex] J_{2,1}=\dfrac{2}{3}P_{2,1}\left(\dfrac{x_0+x}{2}\right)(x-x_0)\ (p=2,\ q=1)\end{cases} \tag{24}$$

Теорема 2. За полином

$$P_{p,q}(t)=(t-x)^p\,(t-x_0)^q;\quad p,\ q\in N$$

важи

$$J_{p,q}=\int_{x_0}^{x}P_{p,q}(t)\,dt=P_{p,q}\left(\frac{\lambda x_0+x}{1+\lambda}\right)\frac{(2\,p)\,!\,!\;(2\,q)\,!\,!}{(p+q+1)\,!}(x-x_0) \tag{25}$$

а) *за* $p \neq q$: *само за две вредности позитивног параметра* λ *од којих је једна вредност* $\lambda_1 = 1$.

б) *за* $p = q$: *само за једну вредност* $\lambda = 1$.

Доказ. Треба доказати, сходно релацији (21), да једначина

$$\frac{(1+\lambda)^{p+q}}{\lambda^p} = 2^{p+q} \text{ односно } (1+\lambda)^{p+q} - 2^{p+q}\lambda^p = 0 \tag{26}$$

за $p \neq q$ осим јединице има још један позитиван корен; док за $p = q$ има само јединицу као позитиван корен.

Из (26) следује

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{p+q} \binom{p+q}{k} \lambda^k + \left[\binom{p+q}{p} - 2^{p+q}\right] \lambda^p = 0 \tag{27}$$

Како је

$$2^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} < \binom{p+q}{p}$$

за свако p, $q \in N$, то коефицијенти једначине (27) који су иначе сви различити од нуле, имају две промене знака, па је по Декартовој теореми [5] број позитивних корена два или нула. Међутим јединица је корен једначине (26) па је број позитивних корена увек два, или је пак само јединица, као двоструки корен, корен поменуте једначине.

Како се изводна функција функције $f(\lambda) = (1+\lambda)^{p+q} - 2^{p+q}\lambda^p$:

$$f'(\lambda) = (p+q)(1+\lambda)^{p+q-1} - 2^{p+q} p \lambda^{p-1}$$

анулира за $\lambda = 1$ ако и само ако је

$$(p+q)\,2^{p+q-1} - 2^{p+q} p = 0$$

тј. $p = q$, то је јединица двоструки корен једначине (26) ако и само ако је $p = q$.

Овим је теорема 2 у целости доказана.

Теорема 2 генералише формулу (22), наиме према доказаној теореми она је у важности за две тачке сегмента $[x_0,\ x]$ од којих је једна $\frac{x_0+x}{2}$; док формула (22′) важи за јединствену тачку из сегмента $[x_0,\ x]$ $\left(\text{тачку } \frac{x_0+x}{2}\right)$.

Последица. *Ако су* $\lambda_1 = 1$ *и* λ_2 *бројеви за које важи релација* (25) *онда су* $\lambda_1' = 1$ *и* $\lambda_2' = \frac{1}{\lambda_2}$ *бројеви за које важи релација*

$$(25') \qquad J_{p,q}(t) = \int_{x_0}^{x} P_{q,p}(t)\,dt = P_{q,p}\left(\frac{\lambda' x_0 + x}{1+\lambda'}\right)\frac{(2_p)!!\,(2_q)!!}{(p+q+1)!}(x - x_0)$$

и резултати на десним странама у (25) *и* (25′) *су идентични ако су* p *и* q *исте парности, у противном резултати су супротни бројеви.*

Заиста ако је λ корен једначине (26) онда је $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ корен једначине

$$(26') \qquad \frac{(1+\lambda')^{p+q}}{\lambda'^q} = 2^{p+q}$$

настале пермутовањем бројева p и q у једначини (26), чиме је потврђен први део последице.

Како је за бројеве λ и λ' који задовољавају једначине (26) и (26′) респективно, према (20′):

$$P_{p,q}\left(\frac{\lambda x_0 + x}{1+\lambda}\right) = (-1)^{p+q} P_{q,p}\left(\frac{\lambda' x_0 + x}{1+\lambda'}\right)$$

то из горњег следује тврђење и другог дела последице чиме се доказ завршава.

Тако на пример за $p + q = 3$ ($p = 2$, $q = 1$ односно $p = 1$, $q = 2$) имамо

$$(28) \qquad \begin{cases} J_{1,2} = \frac{2}{3} P_{1,2}\left(\frac{\lambda x_0 + x}{1+\lambda}\right)(x - x_0) \text{ за } \lambda_1 = 1 \text{ и } \lambda_2 = \sqrt{5} - 2 \\[2ex] J_{2,1} = \frac{2}{3} P_{2,1}\left(\frac{\lambda' x_0 + x}{1+\lambda'}\right)(x - x_0) \text{ за } \lambda_1' = 1 \text{ и } \lambda_2' = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + 2 \end{cases}$$

i, $J_{1,2}$ и $J_{2,1}$ су супротни бројеви.

Релације (28), третиране посебно, дају генерализацију поменутих резултата Talbot-а и Walter-в.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. К. Гребенча и С. И. Новоселов: Курс математического анализа, часть I, Москва 1960, стр. 320.

[2] Н. М. Матвеев: Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Москва 1963, стр. 173,

[3] Никола Петърчев и Тодор Катев: Върху един начин за трансформация на полиноми и някои приложения, Годишник на ВТУЗ — Математика 1966 (1967), 3, № 1, стр. 64.

[4] Talbot, Walter: An integral property of cubics und quadratics, Math. Mag. 1964, 37, № 5, 325.

[5] Б. П. Демидович и И. А. Марон: Основы вычислительной математики, Москва 1963, стр. 174.

ДВЕ ТЕОРЕМИ В ТЕОРИИ ПОЛИНОМОВ

Јован В. Малешевић

СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе даны следующие новые результаты:

Теорема 1, которая может бить интересной в теории неравенств.

Лема, которая третирует формулу (16) с параметрами

$$p \in N,\ q \in Re \text{ и } q \geqslant 0,\ \lambda \in Re^{+}$$

и которая для $q \in N$ даёт формулу (20) в следствии леме, а эта дальше для $\lambda = 1$ даёт одно интегральное свойство полинома регулированное теоремой 3 в работе Н. Петърчев-а и Т. Катев-а [3] — формулы (22) (22′) (в которым опять содержаны резултаты Talbot-a и Walter-a [4] — формулы (23) и (24)·

Теорема 2 в которой коеффициенти при полиномами на правой стране формулы (21) являются постояиными при постоянной суми $p + q = n$ (формула (25)) генерализирует приведённые уже результаты Н. Петърчев-а и Т. Катев-а в смисле выбора точек из сегмента $[x_0, x]$.

В конце, следствые теоремы 2 регулирует отношения между величинами $J_{p,q}$ и $J_{q,p}$ что демонстрированно и специялным случаем — формулы (28) (который даёт генералызацию приведённых резултатов Talbot-a и Walter-a).