

ПРИМЕДБА ЗА ДВЕ ДЕТЕРМИНАНТИ
ГОДИШЕН ЗБОРНИК НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ
НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ, Книга 2 (1949), 195-205

I

1. Ставајќи една примедба во врска со континуантата што ја посматра Novarese, покрај другото, E. Cesaro¹⁾ наведува за детерминантата

$$D_n = \begin{vmatrix} x + a_0 + a_1 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x - a_1 & x + a_1 + a_2 & x - a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & x - a_2 & x + a_2 + a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x + a_{n-1} + a_n \end{vmatrix} \quad (1)$$

вредност

$$a_0 a_1 \cdots a_n \left[\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} + x(\sigma_1 + 4\sigma_2 + \cdots + n^2 \sigma_n) \right] \quad (2)$$

каде што σ_i значи

$$\sigma_i = \frac{1}{a_0 a_i} + \frac{1}{a_1 a_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-i} a_n}.$$

Дека е горното тврдење неточно, можеме да се увриме развијајќи ја детерминантата по елементите од последниот ред. Ја добиваме рекурзивната формула

$$D_k = (x + a_{k-1} + a_k) D_{k-1} - (x - a_{k-1})^2 D_{k-2} \quad (3)$$

која што важи за $k = 1, 2, \dots, n$.

Израчунавајќи D_1 и D_2 наогаме дека се тие функции од прва степен по x и заменети во (3) даваат за D_n израз кој што претставува функција од трета степен. Резултатот што е наведен од Cesaro, покажува дека детерминантата треба да биде функција од прва степен по x , што не одговара на стварноста.

2. Ние ќе се постараеме да побараме една детерминанта, вредноста што ќе и биде дадена со изразот (2). За таа цел ќе вемеме една заоквирна детерминанта и ќе ја развиеме по Caiuchy-евиот образец. Познато ни е, дека ако е дадена некоја детерминанта

$$A = |a_{ik}|, \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n)$$

може да се образува заоквирна детерминанта, додавајќи и по една или повеќе врсти и колони. Ако на A додадеме една колона со елементите x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ и една врста со елементите y_k , $k = 1, 2, \dots, n$, така што $x_{n+1} = y_{n+1} = z$, ја добиваме детерминантата B .

Развијајќи ја детерминантата B по елементите на последната врста и колона т.е. по производе $x_i y_k$ и имајќи предвид дека е коефициентот од овој производ комплементарниот минор на минорот

¹⁾ E. Cesaro, *Remarques sur un continuant (Mathesis, t. II, 1892, p. 5—12)*.

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & x_i \\ y_k & z \end{vmatrix}$$

го добиваме познатиот Cauchy-ев образец

$$B = Az - \sum (-1)^{i+k} x_i y_k A_{ik}. \quad (4)$$

Нека е

$$A = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & a_1 + a_2 & -a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

и нека се $x_i = x$; $y_k = -1$; $z = +1$ елементи што ги допишуваат. Тогаш детерминантата изменета по контурата добива вид

$$B = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ -a_1 & a_1 + a_2 & -a_2 & \cdots & 0 & x \\ 0 & -a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & 0 & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (5)$$

која што развиена по Cauchy-евиот образец станува

$$B = A + x \sum (-1)^{i+k} \Delta_{ik}.$$

Но бидејќи е

$$(-1)^{i+k} \Delta_{ik} = \Delta_{ik}$$

за секоје i и k , крајната вредност од заоквирната детерминанта е

$$B = A + x \sum \Delta_{ik}.$$

Бидејќи од друга страна е

$$A = a_0 a_1 \dots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

и

$$\sum \Delta_{ik} = a_0 a_1 \dots a_n (\sigma_1 + 4\sigma_2 + \dots + n^2 \sigma_n).$$

каде што σ_i има вредност порано спомната, добиваме

$$B = a_0 a_1 \dots a_n \left[\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} + x (\sigma_1 + 4\sigma_2 + \dots + n^2 \sigma_n) \right]$$

а това е изразот што е од Cesaro наведен. Меѓутоа детерминантите (1) и (5) не се идентични освен во случајот кога е $n = 1, 2$.

3. Ако детерминантата A ја земеме во облик

$$A = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_0 & a_0 & \cdots & a_0 \\ a_0 & a_0 + a_2 & a_0 & \cdots & a_0 \\ a_0 & a_0 & a_0 + a_3 & \cdots & a_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_0 & a_0 & \cdots & a_0 + a_n \end{vmatrix}$$

заоквирната детерминанта станува

$$B_1 = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_0 & a_0 & \cdots & a_0 & x \\ a_0 & a_0 + a_2 & a_0 & \cdots & a_0 & x \\ a_0 & a_0 & a_0 + a_3 & \cdots & a_0 & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

и развиена по истиот образец дава

$$B_1 = a_0 a_1 a_2 \dots a_n \left[\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_0} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \right].$$

II

4. Под Sardi-ева детерминанта се подразбира детерминантата од облик

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & \alpha_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \alpha_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (1)$$

Развивањето на оваа детерминанта лесно се добива со допишувањето на исти елементи на сите колони¹⁾ или со помош на една друга особена детерминанта²⁾.

Ќе ја развиеме сега оваа детерминанта, сведувајќи ја на други специјални типови од детерминанти, на кои што израчунаването изгледа по просто.

Означиме ли ја детерминантата (1) со D_n и извлечеме од елементите на колоните факторите на елементите x_i , ќе добиеме

$$D_n = \Delta_n \prod_{i=1}^n x_i \quad (3)$$

¹⁾ Rosace, *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. II, 1895 p. 127.

²⁾ A. Hurwitz, *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. II, 1895 p. 368.

каде сме со Δ_n означили детерминантата од облик

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{array} \right| \quad (3)$$

каде е $\left(a_i - \frac{\alpha_i}{x_i} \right)$.

Оваа детерминанта ќе ја израчунаме поаѓајќи од заменувачката детерминанта, во која што основната детерминанта е Δ_n , а елементите на колоните и врстите што ги додаваме -1 , додека е задниот елемент $+1$. Развиена по Саучиу-евот образец последнава дава

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_n - 1) = \Delta_n - \sum (-1)^{i+k} A_{ik}.$$

Бидејќи е

$$\sum (-1)^{i+k} A_{ik} = (a_1 - 1) \dots (a_n - 1) \left[\frac{1}{a_1 - 1} + \dots + \frac{1}{a_n - 1} \right],$$

добиваме

$$\Delta_n = \frac{(a_1 - x_1)(a_2 - x_2) \dots (a_n - x_n)}{x_1 x_2 \dots x_n} \left[1 + \frac{x_1}{a_1 - x_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n - x_n} \right]$$

или заменена во (2), дава

$$D_n = (a_1 - x_1) \dots (a_n - x_n) \left[1 + \frac{x_1}{a_1 - x_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n - x_n} \right]. \quad (4)$$

5. Ако од елементите на последната врста ги одземиме елементите што одговараат на претпоследната, од овие претходните и така по ред до втората, ќе добијеме детерминантата

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 - a_1 & x_2 - x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 - a_2 & x_3 - x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n - x_{n-1} \end{array} \right|,$$

која што претставува тип на Escherich-ова детерминанта¹⁾.

Вредноста на оваа детерминанта е

$$\begin{aligned} D_n &= a_1 (a_2 - x_2) \cdots (a_n - x_n) \\ &\quad + x_2 (a_1 - x_1) \cdots (a_n - x_n) \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ &\quad + x_n (a_1 - x_1) \cdots (a_{n-1} - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Со додавање и одземање на производот

$$x_1 (a_2 - x_2) \cdots (a_n - x_n)$$

добиваме (4).

¹⁾ Да се види, напр. Pascal, *Die Determinanten*, немски превод H. Leitzmann, S. 144.

ПРИМЕЧАНИЕ О НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ
(Выход)

В нем дается одна исправка в связи с определителем (1) который рассматривает Чезаро.

REMARQUES SUR QUELQUES DÉTERMINANTS^{*)}

(Résumé)

1. E. Cesàro¹⁾ avait assigné au déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} x+a_0+a_1 & x-a_1 & 0 & \dots & 0 \\ x-a_1 & x+a_1+a_2 & x+a_2 & \dots & 0 \\ 0 & x-a_2 & x+a_2+a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$$

considéré par Novarese²⁾, la valeur suivante

$$a_0 a_1 \dots a_n \sum_{v=0}^n \left(\frac{1}{a_v} + x v^2 \sigma_v \right), \quad (1)$$

où l'on a posé

$$\sigma_i = \sum_{v=0}^{n-i} \frac{1}{a_v a_{v+1}}.$$

Or, en développant ce déterminant suivant les éléments de la dernière ligne, on obtient pour D_n la formule de récurrence suivante

$$D_k = (x+a_{k-1}+a_k) D_{k-1} - (x-a_{k-1})^2 D_{k-2}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

Il s'ensuit que la valeur du déterminant considéré ne correspond aux valeurs (1) que pour $n=1$ et $n=2$, tandis que pour $n \geq 3$ ces valeurs en diffèrent, étant donné que, d'après la formule de récurrence, D_n ne peut être un polynôme du premier degré en x lorsque $n \geq 3$.

$$B(x) = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & x \\ -a_1 & a_1+a_2 & -a_2 & \dots & 0 & x \\ 0 & -a_2 & a_2+a_3 & \dots & 0 & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

que l'on obtient en encadrant le déterminant

$$B = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & a_1+a_2 & -a_2 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2+a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}.$$

^{*)} Les renvois bibliographiques se rapportent à même article écrit en langue macédonienne.

On a, en effet,

$$B(x) = a_0 a_1 \dots a_n \sum_{v=0}^n \left(\frac{1}{a_v} + x v^2 \sigma_v \right).$$

L'on déduit cette valeur de $B(x)$ en partant de la formule connue de Cauchy

$$A(x_i, y_k, z) = Az - \sum (-1)^{i+k} x_i y_k A_{ik}, \quad (2)$$

où A désigne le déterminant

$$A = |a_{ik}|, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

$A(x_i, y_k, z)$ le déterminant obtenu en encadrant le déterminant A , en y ajoutant comme dernière colonne les x_i et comme dernière ligne les y_k , et en y posant

$$x_{n+1} = y_{n+1} = z,$$

et où A_{ik} désigne le mineur complémentaire au mineur

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & x_i \\ y_k & z \end{vmatrix}.$$

En partant de la formule (2), l'on peut de même obtenir une expression semblable à celle de $B(x)$, donnant la valeur du déterminant que l'on obtient en encadrant le déterminant

$$C = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & a_0 & a_0 & \dots & a_n \\ a_0 & a_0 + a_2 & a_0 & \dots & a_0 \\ a_0 & a_0 & a_0 + a_3 & \dots & a_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_0 & a_0 & \dots & a_0 + a_n \end{vmatrix}.$$

On a, en effet, d'après la notation précédente,

$$C(x-1, 1) = a_0 a_1 a_2, \dots, a_n \left\{ \sum_{v=0}^n \frac{1}{a_v} + \frac{x}{a_v} \sum_{v=0}^n \frac{1}{a_v} \right\}.$$

2. En partant de la formule (2) de Cauchy, on peut de même obtenir la valeur du déterminant de Sardi, (voir de même Rosace¹) et Hurwitz².

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & \alpha_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \alpha_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix},$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\Delta = x_1 x_2 \dots x_n D, \quad (8)$$

ayant posé

$$a_i = \frac{\alpha_i}{x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (4)$$

et

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

En encadrant ce dernier déterminant par

$$x_i = y_k = -1 \text{ et } z = 1,$$

c. à d. en considérant, d'après la notation précédente, le déterminant

$$D(-1, -1, 1),$$

et en lui appliquant la formule (2) de Cauchy, l'on obtient pour le déterminant D la valeur

$$D = (a_1 - 1)(a_2 - 1) \dots (a_n - 1) \left[1 + \frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + \dots + \frac{1}{a_n - 1} \right],$$

et d'où l'on déduit, d'après (3) et (4), que

$$\Delta = (\alpha_1 - x_1) \dots (\alpha_n - x_n) \left[1 + \frac{x_1}{\alpha_1 - x_1} + \dots + \frac{x_n}{\alpha_n - x_n} \right]. \quad (5)$$

Remarquons, enfin, qu'en soustrayant les éléments de chaque ligne à ceux de la ligne précédente, le déterminant Δ se réduit à celui de Escherich, (voir Pascal)¹⁾

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 - \alpha_1 & \alpha_2 - x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3 - x_3 & \alpha_4 - x_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n - x_n \end{vmatrix},$$

dont la valeur est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha_1(\alpha_2 - x_2) \dots (\alpha_n - x_n) \\ &\quad + x_2(\alpha_1 - x_1) \dots (\alpha_n - x_n) \\ &\quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &\quad + x_n(\alpha_1 - x_1) \dots (\alpha_{n-1} - x_{n-1}), \end{aligned}$$

et qui est identique à l'expression (5).