Математички Билтен
21 (XXI)
1997 (21–26)
Скопје, Македонија

ISSN 0351–336X

ЕГЗИСТЕНЦИЈА И КОНСТРУКЦИЈА НА РАЦИОНАЛНО РЕШЕНИЕ НА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ СО ПОЛИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Боро М. Пиперевски

Апстракт

Во овој труд се разгледуваат диференцијалните равенки (8) и (15) и се добиени егзистенцијални услови (12) односно (20) за нивна интеграбилност. Во специјален случај условите преминуваат во услови за егзистенција на рационално решение. Со постапката е конструирана и формула за соодветното партикуларно решение.

1. Нека е дадена диференцијална равенка од вид:

$$Ay'' + By' + Cy = 0\,, \tag{1}$$

каде A, B и C се полиномни коефициенти од втор, прв и нулти степен. Во литературата е познато дека потребен и доволен услов равенката (1) да има едно полиномно решение од степен n, е даден со релацијата

$$(n\,(n-1)A'')/2 + nB' + C = 0\,. \tag{2}$$

Во случај релацијата (2) да биде задоволена за два природни броја, тогаш степен на полиномното решение ќе биде помалиот од нив. Полиномното решение ќе биде дадено со таканаречената формула на Родригес

$$y = AF^{-1}\left[A^{n-1}F\right]^{(n)}\,, \tag{3}$$

а општото решение со формулата

$$y = AF^{-1}\left[A^{n-1}F\left(C_1 + C_2 \int A^{-n}F^{-1}\,dx\right)\right]^{(n)},$$

каде C_1 и C_2 се произволни константи, а $F = \exp\int(B/A)dx$.

2. Нека ја разгледаме диференцијалната равенка од вид:

$$(x - x_1)(x - x_2)y'' + (b_1x + b_0)y' + c_0y = 0, \qquad (x_1 \neq x_2), \tag{4}$$

односно нејзината идентична равенка

$$y'' + \left(\frac{p}{x - x_1} + \frac{q}{x - x_2}\right)y' + \frac{c_0y}{(x - x_1)(x - x_2)} = 0, \tag{5}$$

каде

$$\begin{aligned} p &= \frac{b_1x_1 + b_0}{x_1 - x_2}, \quad q = \frac{b_1x_2 + b_0}{x_2 - x_1}, \\ b_1 &= p + q\,,\ b_0 = -(x_1q + x_2p)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Со смена:

$$y = (x - x_1)^{-p/2}(x - x_2)^{-q/2}z \tag{7}$$

равенката (5) се трансформира во равенката

$$4(x - x_1)^2(x - x_2)^2z'' + (a_2x^2 + a_1x + a_0)z = 0, \tag{8}$$

каде

$$\begin{aligned} a_2 &= A + B + C\,, \\ a_1 &= -2x_2A - 2x_1B - (x_1 + x_2)C\,, \\ a_0 &= x_2^2A + x_1^2B + x_1x_2C\,, \end{aligned} \tag{9}$$

при што изразите A, B и C се дадени со

$$A = 2p - p^2\,,\ B = 2q - q^2\,,\ C = 4c_0 - 2pq\,. \tag{10}$$

Условот (2) применет на равенката (4) односно на равенката (5), ќе биде даден со релацијата

$$n(n - 1) + nb_1 + c_0 = 0\,,$$

односно релацијата

$$n(n - 1) + n(p + q) + c_0 = 0\,. \tag{11}$$

Во врска со (9) и (10) последниот услов ќе гласи:

$$
\begin{aligned}
4n(n-1)&+4\left(1\pm\sqrt{1-A}+1\pm\sqrt{1-B}\right)n+C+ \\
&+2\left(1\pm\sqrt{1-A}\right)\left(1\pm\sqrt{1-B}\right),
\end{aligned} \tag{12}
$$

каде

$$
\begin{aligned}
A&=\frac{a_2x_1^2+a_1x_1+a_0}{(x_2-x_1)^2}, \\
B&=\frac{a_2x_2^2+a_1x_2+a_0}{(x_2-x_1)^2}, \\
C&=-\frac{[2a_2x_1x_2+a_1(x_1+x_2)+2a_0]}{(x_2-x_1)^2}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Да забележиме дека условот (12) претставува всушност 8 релации.

Значи егзистенцијата на природен број n (помалиот, ако се два) за кој се задоволени релациите (12), напишани скратено преку изразите A, B и C дадени со (13), ќе биде услов диференцијалната равенка (8), според формулата (3) и смената (7), да има едно решение од вид

$$
z=(x-x_1)^{1+\frac{p}{2}}(x-x_2)^{1+\frac{q}{2}}W^{-1}\left(P^{n-1}W\right)^{(n)}, \tag{14}
$$

каде $P=(x-x_1)(x-x_2)$, $Q=(p+q)x-(x_1q+x_2p)$, $W=\exp\int(Q/P)dx$, $p=1\pm\sqrt{1-A}$, $q=1\pm\sqrt{1-B}$, со исти знаци пред коренот како во задоволениот услов.

Лема 1. Диференцијалната равенка (8) може да се интегрира во затворен вид ако постои природен број (помалиот, ако се два) кој го задоволува условот (12). При тоа едно нејзино решение е дадено со формулата (14).

Последица 1. Во случај кога p и q се парни броеви, тогаш условот (12) ќе претставува услов за егзистенција и конструкција на рационално решение на равенката (8).

Да забележиме дека при познати коефициенти на равенката (8) со формулите (13) и формулите (10) односно формулите

$$
\begin{aligned}
p&=1\pm\sqrt{1-A}, \\
q&=1\pm\sqrt{1-B}, \\
4c_0&=C+2\left(1\pm\sqrt{1-A}\right)\left(1\pm\sqrt{1-B}\right),
\end{aligned}
$$

многу едноставно се доаѓа до коефициентите p, q, c_0 на сите равенки од вид (4) односно (5). Од условот (12) веднаш се наложуваат ограничувањата $A \le 1$, $B \le 1$, односно

$$(a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0) \le (x_2 - x_1)^2 , \qquad (a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0) \le (x_2 - x_1)^2$$

како услови кои треба да ги задоволува една равенка од вид (8) за да би можела да биде интеграбилна според условот (12). Условот (12) за интеграбилност може да се примени за сите диференцијални равенки чиј нормален вид е равенката (8).

3. Нека повторно ја разгледаме диференцијалната равенка (1), односно нејзиниот вид:

$$y'' + \left(\frac{p_0}{x - x_1} + \frac{q_0}{x - x_2}\right) y' + \left[\frac{r_0}{(x - x_1)(x - x_2)}\right] y = 0 , \tag{15}$$

$$p_0, q_0, r_0, x_1, x_2 \in R, \quad x_1 \ne x_2 .$$

Со трансформациите [1]

$$\begin{aligned} y &= (x - x_1)^{1-p_0} z_1 ; \\ y &= (x - x_2)^{1-q_0} z_2 ; \\ y &= (x - x_1)^{1-p_0} (x - x_2)^{1-q_0} z_3 , \end{aligned} \tag{16}$$

равенката се трансформира во најмногу три други диференцијални равенки од иста форма, дадени со

$$\begin{aligned} z_1'' + [p_1/(x - x_1) + q_1/(x - x_2)] z_1' + [r_1/(x - x_1)(x - x_2)] z_1 &= 0, \\ z_2'' + [p_2/(x - x_1) + q_2/(x - x_2)] z_2' + [r_2/(x - x_1)(x - x_2)] z_2 &= 0 , \\ z_3'' + [p_3/(x - x_1) + q_3/(x - x_2)] z_3' + [r_3/(x - x_1)(x - x_2)] z_3 &= 0 , \end{aligned} \tag{17}$$

каде

$$\begin{array}{lll} p_1 = 2 - p_0 & p_2 = p_0 , & p_3 = 2 - p_0 , \\ q_1 = q_0 , & q_2 = 2 - q_0 , & q_3 = 2 - q_0 , \\ r_1 = r_0 - p_0 q_0 + q_0 , & r_2 = r_0 - p_0 q_0 + p_0 , & r_3 = r_0 - p_0 - q_0 + 2 . \end{array} \tag{18}$$

Да забележиме дека сите 4 равенки имаат ист нормален вид даден со равенката (8) при што $p = p_0$, $q = q_0$, $c_0 = r_0$.
Во согласност со условот (11) можеме да ја искажеме следната:

Лема 2. Равенката (15) е интеграбилна ако постои природен број n (помалиот, ако се два) кој задоволува една од релациите:

$$\begin{aligned} n(n-1)+n(p_0+q_0)+r_0&=0,\\ n(n-1)+n(p_1+q_1)+r_1&=0,\\ n(n-1)+n(p_2+q_2)+r_2&=0,\\ n(n-1)+n(p_3+q_3)+r_3&=0\,, \end{aligned} \tag{19}$$

односно релациите:

$$\begin{aligned} &n^2+(p_0+q_0-1)n+r_0=0,\\ &n^2+(q_0-p_0+1)n+r_0-p_0q_0+q_0=0,\\ &n^2+(p_0-q_0+1)n+r_0-p_0q_0+p_0=0,\\ &n^2+(3-p_0-q_0)n+r_0-p_0-q_0+2=0\,. \end{aligned} \tag{20}$$

При тоа во согласност со смените (16) и формулата (3) едно партикуларно решение ќе биде дадено со формулата

$$y=(x-x_1)(x-x_2)\,W^{-1}\,(P^{n-1}\,W)^{(n)}\,, \tag{21}$$

каде $P=(x-x_1)(x-x_2)$, $Q=(p_0+q_0)x-(x_1q_0+x_2p_0)$ и $W=\exp\int(Q/P)dx$, односно формулите:

$$y=(x-x_1)^{2-p_0}(x-x_2)W^{-1}(P^{n-1}\,W)^{(n)}\,, \tag{22}$$

каде $P=(x-x_1)(x-x_2)$, $Q=(p_1+q_1)x-(x_1q_1+x_2p_1)$ и $W=\exp\int(Q/P)dx$,

$$y=(x-x_1)(x-x_2)^{2-q_0}\,W^{-1}(P^{n-1}\,W)^{(n)}\,, \tag{23}$$

каде $P=(x-x_1)(x-x_2)$, $Q=(p_2+q_2)x-(x_1q_2+x_2p_2)$ и $W=\exp\int(Q/P)dx$,

$$y=(x-x_1)^{2-p_0}\,(x-x_2)^{2-q_0}\,W^{-1}\,(P^{n-1}\,W)^{(n)}\,, \tag{24}$$

каде $P=(x-x_1)(x-x_2)$, $Q=(p_3+q_3)x-(x_1q_3+x_2p_3)$ и $W=\exp\int(Q/P)dx$, во зависност со задоволената релација од релациите (19) односно (20).

Последица 2. Во случај кога p_0 и $q_0\in Z$ (се цели броеви) резултатите од лема 2 се однесуваат на егзистенција и конструкција на рационално решение на равенката (15).

Литература

[1] Boro Piperevski: *One transformation of a class of linear differential equations of the second order*; Proceedings, Department of Electrical Engineering, tome 6-7 (1990) p.27-34, Skopje;

ON THE EXISTENCE AND CONSTRUCTION OF A RATIONAL SOLUTIONS OF A CLASS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

Boro M. Piperevski

Summary

In this paper we consider a class of linear differential equations of the form (8) and (15) about the existence and construction of a rational solutions. The main result obtained here is the folowing.

Lemma 1. If exist a natural number n, the conditions (12) is fulfiled (smaller if they are two), then the differential equation (8) can be integrated on a closed way. In that case a particular solution of (8) is given by formula (14).

Remark. If p, q are numbers even in this case, (12) are conditions of existence and construction for rational solution.

Lemma 2. If exist a natural number n the conditions (20) is fulfiled (smaller if they are two), then the differential equation (15) can be integrated on a closed way. In that case a particular solution of (15) is given by formula (21) or (22) or (23) or (24).

Remark. If p, q are integers in this case, (20) are conditions of existence and construction for rational solution.

Faculty of Electrical Engineering,

The "St. Kiril and Metodij" University,

P.O. Box 574,

91000 Skopje,

Macedonia