Математички Билтен
17 (XLIII)
1993 (5-20)
Скопје, Македонија

ISSN 0351-336X

POLYNOMIAL SOLUTIONS OF ALGEBRAIC ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. I

V.N. Gorbuzov

Abstract. Polynomial solutions with singular and non-singular degrees of algebraic differential equations are considered.

INTRODUCTION

Consider algebraic differential equation

$$\sum_{i=0}^{N} B_i(z) \prod_{k=1}^{s_i} \{w^{(\ell_{ki})}\}^{\nu_{ki}} = 0, \tag{1}$$

where all coefficients $B_i(z)$ are complex polynomials of z and

$$B_i(z) = \beta_i z^{b_i} + \ldots, \quad \beta_i \neq 0, \quad i=\overline{0,N}. \tag{2}$$

Suppose that complex polynomials

$$w = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \ldots + \alpha_0, \quad \alpha_m \neq 0, \tag{3}$$

are the solutions of the differential equation (1).

For the first time the putting of such problem for nonlinear differential equations and its solution were realized by E.D.Rainville in the 30-th years [1] when polynomial solutions (3) were found for canonical Riccati's differential equation and for equation $w'=A_0(z)+A_1(z)w+w^2$ with polynomial coefficients $A_0(z)$ and $A_1(z)$.

In these years A.Mambriani [2] and, early, W.C.Brenke [3] considered polynomial solutions of linear differential equations.

Further investigations of nonlinear differential equations date from the 50-th years and belong to J.G.Campbell and M.Golomb [4,5] who also found polynomial solutions of Riccati's equation.

If E.D.Rainville found polynomial solutions of Riccati's equation on the whole by its coefficients $A_0(z)$ and $A_1(z)$ (see §6), and J.G.Campbell and M.Golomb found possible degrees m of polynomial solutions (3) in the dependence of the degrees of the coefficients $A_i(z)$ of Riccati's equation (see §1).

Mathematics subject classifications (1980): 34A05
Keywords and phrases: Ordinary equation, polynomial solution

In the 60-th years polynomial solutions were studied by I.A.Shapkarev [6], E.L.Ortiz and P.Liorente [7,8], A.Hautot [9, 10,101] for linear differential equations and were studied by M.Bhargava and H.Kaufman [11-13] for algebraic differential equations of Riccati's-Abel's type.

After 1960 the investigations were enriched by new ideas the greater part of which gave fruitful results later in the 80-th years. In the papers by M.Bhargava and H.Kaufman new approaches to the investigation of polynomial solutions were projected, that was served to the increasing of the quantity of the investigations in the 70-th and 80-th years. Here special role belongs to the investigations of D.S.Dimitrovski and P.R.Lazov. In this period the class of algebraic differential equations is considerably extended from which polynomial solutions are founded. More diverse problems about properties of polynomial solutions are lay down. At the same time with the continuation of the investigations of the finding of the degrees of polynomial solutions and of the building of polynomial solutions on the whole by means of polynomials-coefficients the questions about the quantity of polynomial solutions of different degrees are solved (see §5), necessary and sufficient conditions of the existence of maximal number of polynomial solutions of definite structure are determined (see §7). B.Bhargava and H.Kaufman even tried to transfer the methods using for the finding of polynomial solutions for the case of rational solutions of the equations of Riccati's type [14]. However all investigators considered only such ordinary differential equations for which that of either method was used directly. There were not the works on a comprehension of known methods of the studing of polynomial solutions except P.R.Lazov's paper [18]. At the same time an absence at that time of corresponding apparatus (as a notion of the degree's functions, the coefficient's functions etc.) compeled him to make cumbersome entries and many theses to give in literatural description or to illustrate them on the examples. By this period of the problem's state entire series of the works first of all of D.S.Dimitrovski and P.R.Lazov [15-32], A.Z.Samujlov [33,34], L.G.Oreshehenko [35-37], and also the works of K.E.Latysheva [38], R.S.Huffstuler, L.D.Smith and Ya Yin Liu [39], Ju.T.Sikorski [40], R.M.Garde [41], I.A.Shapkarev [42-44], E.G.Prolisko [45], B.A. Bondarenko, K.V.Lena, D.Mongerone and M.N.H'ogustorelli [46], E.S. Bubeska [47], D.Zeitlin [48], Z.Hansel and F.Bierski [49], B.A. Shcherbakov and V.V.Karachik [53], L.Lesky [54] are conserned.

Beginning from 1982 in the University of Grodno the group of the mathematicians by direction of the author of this survey-paper was engaged in the studying of polynomial solutions of algebraic differential equations both special and general type (1). The first information on this problem was made in the paper [55] of the school of the operator's theory in functional spaces (Minsk, 1982). The results of the investigations are published in the papers [55-81,96,100] of the author and his pupils of V.S.Nemec, A.A.Krushel'nickij, Ju.Ju.Gnezdovskij, S.I.Kishkel, A.A.Deniskovec.

We'll find polynomial solutions (3) of differential equation (1) in the dependence of the parameters β_i, b_i, ℓ_{ki} and ν_{ki}, entering the definition of the equation (1). For this purpose we introduce next conditional notations in according with [60,82]:

$$x_i = \sum_{k=1}^{s_i} \nu_{ki} \text{ is the } \underline{\text{dimension}}, \quad m_i = \sum_{k=1}^{s_i} \ell_{ki}\nu_{ki} \text{ is the } \underline{\text{weight}},$$

$$L_i = \max\{\ell_{ki}\colon k=\overline{1,s_i}\} \text{ is the } \underline{\text{order}}, \quad S_i(m) = x_i m + b_i - m_i,$$

$\forall m \geq L_i$, $m \in \mathbb{N}_o$, $\mathbb{N}_o = \mathbb{N} \cup \{0\}$, is the <u>degree's function</u>,

$$K_i(m,\alpha_m) = \beta_i \alpha_m^{x_i} \prod_{k=1}^{s_i} \{ \binom{m}{\ell_{ki}} (\ell_{ki})! \}^{\nu_{ki}}, \quad \forall m \geq L_i, \quad m \in \mathbb{N}_o,$$

is the <u>coefficient's function</u> of the i-th term of the differential equation

$$\tilde{K}_i(m) = \alpha_m^{-x_i} K_i(m,\alpha_m), \quad K_i^*(m,\alpha_m) = \beta_i^{-1} K_i(m,\alpha_m), \tag{1}$$

$$\tilde{K}_i^*(m) = \beta_i^{-1}\tilde{K}_i(m); \quad M_{ij} = \{(b_i-m_i)-(b_j-m_j)\}(x_j-x_i)^{-1}, \text{ if } x_i \neq x_j;$$

$$\mathbb{U}_p = \min\{M_{pj}\colon j=\overline{0,p-1}\}, \quad \mathbb{B}_{ps} = \max\{M_{pj}\colon j=\overline{p+s+1,N}\};$$

$d = \max\{x_i\colon i=\overline{0,N}\}$ is the <u>maximal dimension</u>, $\mathbb{D} = \min\{x_i\colon i=\overline{0,N}\}$ is the <u>minimal dimension</u> of the termes of differential equation (1). Then $L = \max\{L_i\colon i=\overline{0,N}\}$ is the order of differential equation (1).

We'll call differential equation's (1) terms with maximal dimension d as dominant terms [83], and the terms with minimal dimension $\mathbb{D}$ will be called minorant terms.

Trivial solution $w(z)\equiv 0$ is not considered as seen from (3).

If $\ell = \min\{L_i: i=\overline{0,N}\}$, then for $\ell > 0$ any polynomial of the degree $m < \ell$ is the solution of the equation (1). Such polynomials will be called trivial polynomial solutions of differential equation (1).

§1. POLYNOMIAL SOLUTIONS WITH SINGULAR AND NON-SINGULAR DEGREES

In this section the investigations (in general) are based on quite obvious

Lemma 1.1. The number m may be the degree of polynomial solution (3) of the differential equation (1) if the values of degree's functions at the point m for two terms of (1) at least are equal and these values must be most among the values of all degree's functions of differential equation (1) at the same point m.

P.R.Lazov [18] gave the notion of singular degrees of polynomial solutions. He defined non-singular degrees of polynomial solutions too. It should be noted that the division of the degrees m of polynomial solutions (3) was projected in the investigations of J.G.Campbell and M.Golomb [4,5] but they didn't introduce the notions of singular and non-singular degrees. Using introduced by us the concepts of the dimension and of the weight of the terms of the equation (1) and also the concepts of the degree's functions and the coefficient's functions all polynomial solutions we'll separate into two classes: polynomial solutions with singular degrees and polynomial solutions with non-singular degrees [59,64,68,73,74]. Further we'll show how to find these and others polynomial solution (3) of differential equation (1).

Definition 1.1. Polynomial solution (3) of algebraic differential equation (1) we'll call polynomial solution with singular degree m, if

$$S_{p_0}(m) = S_{p_1}(m) = \ldots = S_{p_r}(m) > S_{p_\eta}(m),$$
$$x_{p_0} = x_{p_1} = \ldots = x_{p_r}, \quad 0 < r \le N, \quad \eta = \overline{r+1,N}. \qquad (1.1)$$

Then polynomial solutions with non-singular degree m are characterized with this that even though two terms of the equation (1) have non-equal dimensions just as the meanings of their degree's functions at the point m are equal among themselfs and not less then the meanings of the degree's functions of all remaining terms at the same point m.

As following from the concept of polynomial solution with non-singular degree and from Lemma 1.1 we establish that Theorem 1.1 have a place.

Theorem 1.1. Non-singular degrees of polynomial solutions (3) of algebraic differential equation (1) are contained in the tuple

$$\{M_{ij}:\ i=\overline{0,N},\ j=\overline{0,N},\ i\neq j\} \qquad (1.2)$$

moreover there are in the tuple only those integer non-negative numbers that satisfy to unsbrict inequality

$$M_{ij} \ge \max\{L_i, L_j\}$$

and that tuple is constructed on the base of all terms of the equation (1) that have pairwise inequal dimensions $x_i \neq x_j$.

Taking into consideration that the meanings of the degree's functions even though of two terms of the equation (1) with inequal dimensions must not only coincide but and to be largest we conclude that Theorem 1.2 is justly.

Theorem 1.2. In order to the number m from the tuple (1.2) is non-singular degree of polynomial solution (3) of algebraic differential equation (1) it is necessary the existence of f+1, $0 < f \le N$, terms of this equation with a property

$$S_{\tau_0}(m) = S_{\tau_1}(m) = \ldots = S_{\tau_f}(m) > S_{\tau_\varepsilon}(m), \quad \varepsilon = \overline{f+1,N}, \qquad (1.3)$$

moreover there must exist even though two terms in equation (1) with the numbers $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_f$, the dimensions of which are inequal.

Thus for the finding of non-singular degrees of polynomial solutions it is necessary to execute in succession next operations:

1) to form the tuple of numbers (1.2), describing by Theorem 1.1;

2) to choose from the tuple (1.2) the numbers which satisfy to condition (1.3) definite in Theorem 1.2.

The presence of polynomial solutions (3) with singular degree's m is established on the base of next two theorems [72,74].

Theorem 1.3. Singular degrees of polynomial solutions (3) of algebraic differential equation (1) are contained in the set of all integer non-negative roots of the equations

$$\sum_{i=0}^{s_r} \tilde{K}^r_{\tau p_i}(m)=0,\ r=\overline{0,k},\ S_r=\overline{1,h_r},\ p_i=\overline{0,h_r},\ p_i\neq p_j,\ i\neq j,\ i\leq h_r\leq N, \qquad (1.4)$$

built on the base of those terms of equation (1) for which

$$x^r_{\tau 0} = x^r_{\tau 1} =\ldots= x^r_{\tau h_r},\ b^r_{\tau 0}-m^r_{\tau 0} = b^r_{\tau 1}-m^r_{\tau 1} =\ldots= b^r_{\tau h_r}-m^r_{\tau h_r},$$
$$r=\overline{0,k},\ 1 \leq h_r \leq N. \qquad (1.5)$$

Theorem 1.4. Let m is integer non-negative root of one of the equations (1.4) by the conditions (1.5). Then the number m can be singular degree of polynomial solution (3) of algebraic differential equation (1) if there exists such number r and it is unique that

$$S^r_{\tau 0}(m) = S^r_{\tau 1}(m) =\ldots= S^r_{\tau h_r}(m) > S^r_{\eta}(m), \qquad (1.6)$$

where $S_\eta(m)$ are the degree's functions of the terms of the equation (1) differing from those terms on the base of which the degree's functions situated in left part of inequality (1.6) are built.

In (1.4) each of the equations gives considerable quantity of the roots which wittingly can not be singular degree's of polynomial solutions and the equations (1.4) themselfs was constructed by simple looking over without definite rule. Moreover often it is more easy to check whether any number m is the root of an equation or not then to find all possible roots of one. The answer on putting questions in some degree can be given if to introduce to the considering the order L_i of the terms of differential equation (1) on the base of which we construct the equality (1.4).

Not disturbing of the community of the reasonings we'll consider that the first h+1 terms of algebraic differential equation (1) have a property

$$x_o = x_1 = \ldots = x_h \neq x_\eta,\ b_o - m_o = b_1 - m_1 = \ldots = b_f - m_f > b_\delta - m_\delta, \\ \eta = \overline{h+1,N},\ 1 \le f \le h,\ \delta = \overline{f+1,h},\ 1 \le h \le N. \tag{1.7}$$

Further the first h+1 terms depending on the orders L_i we separate into the classes in the following way.

<u>Class 1</u>. $L_{p_o^o} = L_{p_1^o} = \ldots = L_{p_{q_o}^o} = L_o$. <u>Class 2</u>. $L_{p_o^1} = L_{p_1^1} = \ldots = L_{p_{q_1}^1} = L_1$ etc.

<u>Class v+1</u>. $L_{p_o^\nu} = L_{p_1^\nu} = \ldots = L_{p_{q_\nu}^\nu} = L_\nu$, where

$$L_o < L_1 < \ldots < L_\nu, \tag{1.8}$$

$$\sum_{\tau=o}^{\nu} q_\tau = f - \nu. \tag{1.9}$$

Singular degree's m of polynomial solutions (3) of algebraic differential equation (1) on the base of h+1 terms with the property (1.7) that previously are devided into the classes $1-(\nu+1)$ by the conditions (1.8) and (1.9) we'll find consistently in the following way.

<u>Step 1</u>. For $q_o \ge 1$ make up the equation

$$\sum_{i=o}^{q_o} \tilde{K}_{p_i^o}(m) = 0, \tag{1.10}$$

and check whether the numbers m_t^o such that

$$L_o \le m_t^o < L_1 \tag{1.11}$$

are the roots of the equation (1.10) or not.

Only those roots $m_t^o \in \mathbb{N}_o$ of the equation (1.10) can be singular degree's of polynomial solutions that are connected by double inequality (1.11) and in accordance with Theorem <u>1.4</u> satisfy to the correlation

$$S_{p_o^o}(m_t^o) = S_{p_1^o}(m_t^o) = \ldots = S_{p_{q_o}^o}(m_t^o) > S_\eta(m_t^o), \quad \eta=\overline{h+1,N}.$$

For $q_o=0$ the Step 1 is dropped as the equality (1.10) doesn't take place.

Step 2. We make up the equation

$$\sum_{i=o}^{q_o} \tilde{K}_{p_i^o}(m) + \sum_{i=o}^{q_1} \tilde{K}_{p_i^1}(m) = 0, \tag{1.12}$$

and check whether or not natural numbers m_t^1 such that

$$L_1 \le m_t^1 < L_2 \tag{1.13}$$

are the roots of the equation (1.12).

Only those roots $m_t^1 \in \mathbb{N}$ of the equation (1.12) can be singular degree's of polynomial solutions that are connected by double inequality (1.13) and are satisfied to the correlation

$$S_{p_o^o}(m_t^1) = S_{p_1^o}(m_t^1) = \ldots = S_{p_{q_o}^o}(m_t^1) = S_{p_o^1}(m_t^1) =$$

$$= S_{p_1^1}(m_t^1) = \ldots = S_{p_{q_1}^1}(m_t^1) > S_\eta(m_t^1), \quad \eta=\overline{h+1,N}.$$

By analogous manner we continue the reasonings until ν step inclusively.

Step ν+1. We make up the equation

$$\sum_{i=o}^{f} \tilde{K}_i(m) = 0 \tag{1.14}$$

and find its roots m_t^ν such that $m_t^\nu \in \mathbb{N}$ and

$$m_t^\nu \ge L_\nu. \tag{1.15}$$

Only those roots $m_t^\nu \in \mathbb{N}$ of the equation (1.14) can be singular degree's of polynomial solutions that are connected by the inequality (1.15) and satisfied to the correlation

$$S_o(m_t^\nu) = S_1(m_t^\nu) = \ldots = S_f(m_t^\nu) > S_\eta(m_t^\nu), \quad \eta=\overline{h+1,N}.$$

Thus picking out all possible tuples of the terms of equation (1) with a property analogous to the property (1.7) and for every tuple doing consistently pointed steps we find all possible singular degree's of polynomial solutions (3) of algebraic differential equation (1).

In conclusion we note that considering in this paragraph method of finding of the degree's of polynomial solutions (3) of algebraic differential equation (1) is quite algorithmizirated permiting to use the computer.

R E F E R E N C E S

[1] Rainville, E.D.: Necessary conditions for polynomial solutions of a class Riccati-type differential equations, Amer. Math. Monthly, V. 43, 1936, 473-476

[2] Mambriani, W.C.: Equazioni differenzialli lineari aventi soluzioni polinomiali, Boll. Un. Mat. Ital., V. 17, 1938, 26-32

[3] Brenke, W.C.: On polynomial solution of a class linear differential equations of the second order, Bull. Amer. Math. Soc., V. 36, 1930, 77-84

[4] Campbell, J.G.: A critarion for the polynomial solutions of a certain Riccati equation, Amer. Math. Monthly, V. 59, 1952, 388-389

[5] Campbell, J.G., Golomb, M.: On the polynomial solutions of a Riccati equation, Amer. Math. Monthly, V. 61, 1954, 402-404

[6] Шапкарев, И.А.: За една хомогена линеарна диференцијална равенка од трет ред, Годишен зб. Техн. фак. Ун-т Скопје, N^{o} 6, 1964, 45-51

[7] Ortiz, E.L.: Polynomlösungen von differentialgleichungen, Z. angew. Math. und Mech., V. 46, N^{o} 6, 1966, 394-395

[8] Liorente, P., Ortiz, E.L.: On the existence and construction of polynomial solutions of certain types of differential equations, Rov. Union. Mat. argent. y Asoc. fis. argent. V. 23, N^{o} 4, 1968, 183-189

[9] Hautot, A.: Sur les solutions polynomiales de l'equation différentiélle $z(z-1)P_n''+(az^2+bz+c)P_n'+(d+lz+fz^2)P_n=0$, Bull. Soc. roy. sci. Liége, V. 38, N^{o} 11-12, 1969, 654-659

[10] Hautot, A.: Sur les solutions polynomiales de l'equation différentiélle $zP_n''+(az^2+bz+c)P_n'+(d+lz+fz^2)P_n=0$, Bull. Soc. roy. sci. Liége, V. 38, N^{o} 11-12, 1969, 660-663

[11] Bhargava, M., Kaufman, H.: Degrees of polynomial solutions of a class of Riccati-type differential equations, Coll. Math., V. 16, 1964, 211-223

[12] Bhargava, M., Kaufman, H.: Existence of polynomial solutions of a class of Riccati-type differential equations, Coll. Math., V. 17, 1965, 135-143

[13] Bhargava, M., Kaufman, H.: Some properties of polynomial solutions of a class of Riccati-type differential equations, Coll. Math., V. 18, 1966-1967, 3-6

[14] Bhargava, M., Kaufman, H.: Rational solutions of the Riccati equation, Math. Stud., V.A 40, 1972, 253-256

[15] Лазов, П.Р.: Параметрические решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений, Бил. Друшт. мат. и физ. на СРМ, N^{O} 25, 1974, 9-10

[16] Лазов, П.Р.: Полиномиальные решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений, Бил. Друшт. мат. и физ. на СРМ, N^{O} 25, 1974, 41-44

[17] Lazov, P.R., Dimitrovski, D.S.: Sur une equation differentielle de Riccati, Бил. Друшт. мат. и физ. на СРМ, N^{O} 25, 1974, 37-40

[18] Лазов, П.Р.: Степени полиномиальных решенй алгебраических дифференциальных уравнений, Mat. Balkan, N^{O} 5, 1975, 189-192

[19] Dimitrovski, D.S., Lazov, P.R.: Systeme des equations differentielles du premier ordre au moyen des resides, Год. зб. Природно-мат. фак. Ун-т Скопје, N^{O} 25-26, 1975(1976), 61-65

[20] Лазов, П., Димитровски, Д.: Егзистенција на полиномни решенија на една класа диференцијални равенки,од Clairaut-ов тип, Годишен зб. Природно-мат. фак. Ун-т Скопје, N^{O} 25-26, 1975(1976), 93-99

[21] Лазов, П., Димитровски, Д.: Условия существования максимального числа полиномиальных решений нелинейных дифференциальных уравнений, Год. зб. Природно-мат. фак. Ун-т Скопје, N^{O} 25-26, 1975(1976), 101-106

[22] Лазов,П., Димитровски, Д.: Алгоритми за полиномни решенија на алгебарските диференцијални равенки, Год. зб. Природно-мат. фак. Ун-т Скопје, N^{O} 25-26, 1975(1976), 107-112

[23] Лазов, П.Р.: Параметрическое решение одного класса дифференциальных уравнений типа Клеро, Бил. Друшт. мат. и физ. на СРМ, N^{O} 26, 1975-1976(1977), 33-34

[24] Лазов, П.Р.: Об одной теореме Л.Г.Орещенко, Elektrotehn. fak. Univ. u Beogradu, Ser. Mat. i Fiz., N^{O} 544-576, 1976, 103-109

[25] Лазов, П., Димитровски, Д.: Условия существования максимального числа полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, Т. 13, N^{O} 6, 1977, 1131-1134

[26] Лазов, П.Р.: Полиномна решења двеју нелинеарних диференцијалних једначина, Математички весник, Т. 1, N^{O} 14, 1977 379-385

[27] Лазов, П.Р.: Об одном нелинейном дифференциальном уравнений, Математички весник, Т. 1, N^{O} 14, 1977, 387-391

[28] Лазов, П., Димитровски, Д.: Полиномиальные решения алгебраических дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, Т. 14, N^{O} 5, 1978, 922-925

[29] Lazov, P.: Dve primedbe u vezi sa parametarskim rešavanjem algebarskih diferencijalnih jednačina prvog reda, Матем. весник, Т 3, N° 2, 1979, 157-164

[30] Лазов, П.Р.: Условия существования максимального числа полиномиальных решений одного класса нелинйных дифференциальных уравнений, Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложений (Куйбышев), N° 5, 1979, 112-118

[31] Лазов, П.Р.: Об одной системе нелинейных дифференциальных уравнений, Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложений (Куйбышев), N° 5, 1979, 119-123

[32] Lazov, P.R.: Sur un systeme des equation differentielles algebriques, Glas. Mat. V. 15, N° 1, 1980, 51-60

[33] Самуйлов, А.Э.: Некоторые свойства полиномиальных решений дифференциальных уравнений высших порядков, Дифференц. уравнения, Т. 7, N° 12, 1971, 2287-2289

[34] Самуйлов, А.Э.: О полиномиальных решениях дифференциального уравнения первого порядка, Весцi АН БССР, Сер. фiз-мат. навук, N° 1, 1972, 121-124

[35] Орещенко, Л.Г.: Некоторые свойства целых решений нелинейных дифференциальных уравнений, Диференц. уравнения, Т. 9, N° 7, 1973, 1236-1243

[36] Орещенко, Л.Г.: Целые решения одного нелинейного дифференциального уравнения, Дифференц. уравнения, Т. 10, N° 2, 1974, 253-257

[37] Орещенко, Л.Г.: Условия существования максимального числа полиномиальных решений дифференциаляных уравнений, Дифференц. уравнения, Т. 10, N° 6, 1974, 1009-1014

[38] Латышева, К.Я., Терещенко, Н.И.: Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения (метод Фробениуса-Латышевой), Киев, Институт Математики АН УССР, 1970, 393 с.

[39] Huffstutler, R.G, Smith, L.D., Ya Yin Liu: Criterion for the polynomial solutions of certain first order differential equations, Port. Math. V. 31, N° 3, 1972, 139-145

[40] Сiкорський Ю.Т.: Необiднi та достатнi умови iснування полiномiального частинного разв'язку неоднорiдного лiнiйного диференцiального рiвняння, Вiсник Кiïв, ун-ту, Сер. мат. та мех. N° 14, 1972, 97-99

[41] Garde, R.M.: Polynomial solutions of some nonlinear differential equations of the second order, Math. Stud. V. 42, N° 1, 1974, 90-96

[42] Šapkarev, I.A.: Eine lemerkung über polynomlösungen der homogenen linearen differentialgleichungen, Бил. Друшт. мат. и физ. на СРМ, N° 26, 1975-1976(1977), 5-8

[43] Šapkarev, I.A.: Polynome als allgemeine integrale der normalen homogenen linearen differentialgleichungssysteme, Годишен зб. фак. мат. Ун-т Скопје, N° 28, 1977, 69-72

[44] Šapkarev, I.A.: Polynome als partikuläre integrale der normalen homogenen linearen differentialgleichungssysteme, Годишен зб. фак. мат. Ун-т Скопје, N° 29, 1978, 51-55

[45] Пролиско, Е.Г.: Полиномиальные решения уравнения типа Льенара, Дифференциальные уравнения и их приложения (Днепропетровск), 1976, 105-112

[46] Бондаренко, Б.А., Лен, К.В., Манжерон, Д., Огюэторели, М.Н.: К исследованию полилинейных уравнений с частными производными. I. Полиномиальные решения некоторых классов полилинейных уравнений, Bul. Inst. Politehn. IASI, Sec. 1, V 23(27), N° 3-4, 1977, 15-19

[47] Бубеска, Е.С.: За една Рикатиева диференцијална равенка, Годишен зб. фак. мат. Ун-т Скопје, N° 28, 1977, 83-93

[48] Zeitlin, D.: On a class of ordinary linear differential equations having $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ and $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ as solutions, Amer. Math. Monthly, V. 84, N° 9, 1977, 716-720

[49] Bierski, F., Hansel, Z.: Rozwiazania wielomianowe rownan rozniczkowych i roznicowych liniowych o wspolczynnikach wielomianowych, Zesz. nauk. AGH, N° 583, 1977, 25-36

[50] Щербаков, Б.А., Коренева, Л.В.: О полиномиальных решениях дифференциальных уравнений вида $a_0y+a_1y'+\ldots+a_ny^{(n)}=P(x)$, где $P(x)$ - полином, Исследования по функциональному анализу и дифференциальным уравнениям (Кишинев), 1981, 124-128

[51] Писарёнок, В.П.: Поведение решений одного класса дифференциальных уравнении первого порядка в комплексной плоскости, Дифференц. уравнения, Т. 17, N° 5, 1981, 930-932

[52] Файзиев, С.: Построение полиномиальных решений системы линейных дифференциальных уравнений, Украинский матем. журнал, Т. 35, N° 2, 1983, 259-261

[53] Карачик, В.В.: О полиномиальных решениях линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, Вопросы вычислительной и прикладной математики (Ташкент), N° 77, 1985, 17-36

[54] Lesky, P.: Über polynomlösungen von differentialgleichungen und differentialgleichungen zweiter ordnung, Anz. Osterr. Akad. Wiss. Math. - naturwiss. Kl. V. 121, 1985(1986), 29-33

[55] Горбузов, В.Н.: Независимые полиномиальные решения дифференциального уравнения высшего порядка, Школа по теории операторов в функциональных пространствах (Минск), 1982, 47

[56] Горбузов, В.Н., Денисковец, А.А.: Некоторые свойства полиномиальных решений нелинейного дифференциального уравнения, Доклады АН БССР, Т 26, N° 9, 1982, 776-779

[57] Горбузов, В.Н., Немец, В.С.: К вопросу экспоненциально-полиномиальных решений нелинейного дифференциального уравнения, Доклады АН БССР, Т. 30, N° 4, 1986, 297-300

[58] Денисковец, А.А.: Об одном построении полиномиальных решений алгебраического дифференциального уравнения специального вида, Дифференц. уравнения, ВИНИТИ N° 1926, 1986, 1-23

[59] Горбузов, В.Н., Киткель, С.И.: Обобщенная теорема Виттиха, Школа по теории операторов в функциональных пространствах (Челябинск), 1986, с. 33

[60] Горбузов, В.Н., Самодуров, А.А.: Уравнения Риккати и Абеля, Гродно, ГрГу, 1986, 101 с

[61] Горбузов, В.Н., Немец, В.С.: Целые функции, определяемые дифференциальными уравнениями, Качественная теория дифференциальных уравнений (Иркутск), 1986, 135-136

[62] Киткель, С.И.: По поводу количества полиномиальных решений алгебраического дифференциального уравнения специального вида, Дифференц. уравнения, ВИНИТИ N° 696, 1987, 1-16

[63] Горбузов, В.Н., Киткель, С.И.: По поводу одной теоремы Виттиха, Дифференц. уравнения, Т. 23, N° 5, 1987, 891-893

[64] Крутельницкий, А.А.: Границы изменения степени полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, ВИНИТИ, N° 1023, 1988, 1-29

[65] Горбузов, В.Н., Немец, В.С.: Целые функции-решения дифференциального уравнения первого порядка с обобщенными квазиполиномиальными коэффициентами, Punime Mat., N° 3, 1988, 23-24

[66] Горбузов, В.Н., Немец, В.С.: О целых решениях одного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка, Дифференц. уравнения, ВИНИТИ N° 4015, 1988, 1-26

[67] Горбузов, В.Н., Денисковец, А.А.: Полиномиальные решения обыкновенных алгебраических дифференциальных уравнений типа Риккати-Абеля, Дифференц. уравнения, ВИНИТИ N° 6067, 1988, 1-54

[68] Крутельницкий, А.А.: Границы изменения степени полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, Т. 24, N° 11, 1988, 2010-2012

[69] Горбузов, В.Н., Крутельницкий, А.А.: Рост полиномиальных решений уравнений типа Пенлеве, Дифференц. уравнения, ВИНИТИ N° 8960, 1988, 1-29

[70] Горбузов, В.Н., Гнездовский, Ю.Ю.: Рост параметрических полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений не выше второго порядка и неприводимых уравнений Пенлеве, Дифференц. уравнения, ВИНИТИ N° 8847, 1988, 1-25

[71] Лукашевич, Н.А., Денисковец, А.А., Немец, В.С.: Алгебраические дифференциальные уравнения с максимальным числом полиномиальных решений заданной структуры, Дифференц. уравнения, Т. 24, N° 12, 1988, 2172-2174

[72] Крутельницкий, А.А.: По поводу полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, Т. 24, N° 12, 1988, 2069-2075

[73] Горбузов, В.Н., Крутельницкий, А.А.: О количестве полиномиальных решений различных степеней алгебраических дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, Т. 25, N° 6, 1989, 1069-1071

[74] Крутельницкий, А.А.: Рост полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений, Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Гродно, ГрГу, 1989, 107 с

[75] Gorbuzov, V.N., Samodurov, A.A.: Growth properties of the rational solutions of the second order algebraic differential equation, Inst. of Math. Univ. Oslo, N° 8, 1989, 1-8

[76] Немец, В.С.: Целые решения дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенными квазиполиномиальными коэффициентами, Дифференц. уравнения,ВИНИТИ N° 7313, 1989, 1-19

[77] Горбузов, В.Н., Немец, В.С.: По поводу однозначных решений дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, ВИНИТИ N° 7309, 1-17

[78] Денисковец, А.А.: Целые решения системы алгебраических дифференциальных уравнений второго порядка, Дифференц. уравнения, ВИНИТИ N° 6013, 1990, 1-31

[79] Горбузов, В.Н., Немец, В.С.: Об однозначных решениях дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, Т. 26, N° 6, 1990, 1084-1085

[80] Горбузов, В.Н., Гнездовский, Ю.Ю.: Об алгебраических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений, Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения (Махачкала), 1991, 49

[81] Денисковец, А.А.: Полиномиальные решения нелинейных дифференциальных уравнений, Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Гродно. ГрГу, 1991, 87 с

[82] Виттих, Г.: Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, ГИФМЛ, Москва, 1960, 320 с

[83] Еругин, Н.П.: Проблема Римана, Минска, Наука и техника, 1982, 336 с

[84] Валирон, Ж.: Аналитические функции, ГИТТЛ, Москва, 1957, 236 с

[85] Степанов, В.В.: Курс дифференциальных уравнений, ГИФМЛ, Москва, 1958, 468 с

[86] Лукашевич, Н.А.: Некоторые задачи аналитической теории дифференциальных уравнений, Дис. ... док. физ.-мат. наук, АН УССР, Киев, 1971, 274 с

[87] Громак, В.И., Лукашевич, Н.А.: Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве, Университетское, Минск, 1990, 157 с

[88] Яблонский, А.И.: Аналитические свойства решений систем дифференциальных уравнений, Дис. ... док. физ.-мат. наук, АН БССР, Минска, 1971, 217 с

[89] Мартынов, И.П.: Аналитические свойства уравнений и систем третьего порядка, Дис. ... док. физ.-мат. наук, ГрГу Гродно, 1987, 255 с

[90] Еругин, Н.П.: Теория подвижных особых точек уравнений второго порядка. I, Дифференц. уравнения, Т. 12, N$^{\circ}$ 3, 1975, 387-415

[91] Еругин, Н.П.: Теория подвижных особых точек уравнений второго порядка. II, Дифференц. уравнения, Т. 12, N$^{\circ}$ 4, 1976, 579-598

[92] Еругин, Н.П.: Аналитическая теория и проблемы вещественной теории дифференциальных уравнений, связанные с первым методом и методами аналитической теории, Дифференц. уравнения, Т. 3, N$^{\circ}$ 11, 1967, 1821-1863

[93] Еругин, Н.П.: К теории первого уравнения Пенлеве, Доклады АН БССР, Т. 2, N$^{\circ}$ 1, 1958, 3-6

[94] Айнс, Э.Л.: Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГНТИ, Харьков, 1939, 719 с

[95] Мартынов, И.П.: Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей, Дифференц. уравнения, Т. 21, N$^{\circ}$ 6, 1985, 937-946

[96] Горбузов, В.Н., Немец, В.С.: Построение в целом полиномиальных решений с заданным показателем степени, Дифференц. уравнения, Т. 24, N$^{\circ}$ 9, 1988, 1633-1636

[97] Камке, Э.: Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Наука, Москва, 1976, 576 с

[98] Mitrinović, D.S., Vasić, P.M.: Diferencijalne jednačine, Naučna knjiga, Beograd, 1986, 342 s

[99] Мартынов, И.П., Березкина, Н.С.: Системы типа Пенлеве, ГрГу, Гродно, 1986, 119 с

[100] Горбузов, В.Н.: Полиномиальные решения алгебраических дифференциальных уравнения, ГрГу, Гродно, 1991, 120 с

[101] Hautot, A.: Sur les solutions polynomiales de l'equation differentielle $z(1-z)(a-z)P_n''+(az^2+bz+c)P_n'+(d+ez+fz^2)P_n=0$, Bull. Soc. roy. sci. Liége, V. 40, N$^{\circ}$ 1-2, 1971, 7-12,
Recived ... 199

ПОЛИНОМНИ РЕШЕНИЈА НА АЛГЕБАРСКИ ОБИЧНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ. I

В.Н. Горбузов

Р е з и м е

Во овој труд се разгледуваат полиномни решенија на алгебарски диференцијални равенки со сингуларни и несингуларни степени.

Виктор Н. Горбузов
Гродненский госуниверситет,
Кафедра математического анализа
ул. Ожешко, 22
230023 Гродно
Республика Беларусь