n-АРНЫЙ АНАЛОГОН ТЕОРЕМЫ БЕЛОУСОВА О ЧЕТЫРЕХ КВАЗИГРУППАХ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ СЛЕДСТВИЯ*)

Янез Ушан

1°. Введение

В настоящей работе находится n-арный аналогон следующей теоремы В. Д. Белоусова. Если четыре квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_4$, связаны общим ассоциативным законом

$$A_1[A_2(x, y), z]=A_3[x, A_4(y, z)], \tag{1}$$

то все $Q(A_i)$, $i \in N_4$, изотопны одной и той же группе $Q(A)$**).

В второй части работы утверждаются некоторые следствия (упомянутого n-арного аналогона), относящиеся к n-арным группам.

В [11] теорема о четырех квазигруппах обобщена на тернарный случай, т. е. доказана следующая теорема. Если 3-квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_4$, связаны общей ассоциативностью, т. е. если удовлетворяют равенствам

$$A_1[A_2(x, y, z), u, v]=A_3[x, A_4(y, z, u), v]=A_5[x, y, A_6(z, u, v)], \tag{2}$$

то

1. все $Q(A_i)$, $i \in N_6$, изотопны одной и той же 3-группе $Q(A)$ обладающей единицей;

и 2. существует бинарная группа $Q(B)$ такая, что $A(x, y, z) = B[B(x, y, z]$. В доказательстве этой теоремы была использована только теорема о четырех квазигруппах и ее доказательство из [2].

Для доказательства n-арного аналогона этих теорем будем использовать: теорему о четырех квазигруппах, упомянутый ее тернарный аналогон и некоторые результаты из их доказательств.

---

*) Рад је рађен у оквиру Математичког института СРС у Београду, где је саопштен 13. I. 1971. Члановима секције умножени рукопис је предат 23. XII 1970.

**) Эта теорема впервые была доказана В. Д. Белоусовым в [1]. Другие доказательства имеются еще в нескольких работах; об этом можно познакомиться в [2] на стр. 93. Одно естественное доказательство этой теоремы было получено и С. Б. Прешичем в [10].

Приведем некоторые результаты из доказательств теоремы о четырех квазигруппах и ее тернарного аналогона, по очереди из [2] и [11].

Рез. 1. Если квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_4$, связаны общим ассоциативным законом (1), то справедливы следующие равенства

$$(a_1)\qquad \begin{cases} A_1(x, y) = A(R_1, x,\ L_3 L_4 y) \\ A_2(x, y) = R_1^{-1} A(R_1 R_2 x,\ L_3 R_4 y) \\ A_3(x, y) = A(R_1 R_2 x,\ L_3 y) \\ A_4(x, y) = L_3^{-1} A(R_1 L_2 x,\ L_3 L_4 y), \end{cases}$$

где $Q(A)$ группа, $L_i x \overset{def}{=} A_i(\kappa, x)$ а $R_i x \overset{def}{=} A_i(x, \kappa)$, $i \in N_4$; к является фиксированным элементом множества Q.

Рез. 2. Если 3-квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_6$, удовлетворяют равенствам (2), то справедливы следующие равенства

$$(a_2)\qquad \begin{cases} A_1(x, y, z) = A(R_1 x, S_3 L_4 y, L_5 L_6 z) \\ A_2(x, y, z) = R_1^{-1} A(R_1 R_2 x,\ S_3 R_4 y, L_5 R_6 z) \\ A_3(x, y, z) = A(R_1 R_2 x, S_3 y, L_5 L_6 z) \\ A_4(x, y, z) = S_3^{-1} A(R_1 S_2 x, L_5 R_6 y, L_5 S_6 z) \\ A_5(x, y, z) = A(R_1 R_2 x, S_3 R_4 y, L_5 z) \\ A_6(x, y, z) = L_5^{-1} A(R_1 L_2 x, S_3 L_4 y, L_5 L_6 z), \end{cases}$$

где $Q(A)$ 3-группа обладающая единицей, $L_i x \overset{def}{=} A_i(\kappa, \kappa, x)$, $S i x \overset{def}{=} A i(\kappa, x, \kappa)$, а $R i x \overset{def}{=} A i(x, \kappa, \kappa)$, $i \in N_6$; к является фиксированным элементом множества Q.

Рез. 3. Пусть 3-квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_6$, удовлетворяют равенствам (2). Тогда справедливы следующие равенства

$$(a_3)\qquad \begin{cases} A_1(x, y, \kappa) = B(R_1 x, \ldots) \\ A_1(x, \kappa, y) = B(R_1 x, \ldots) \\ A_2(\kappa, x, y) = R_1^{-1} B(\ldots) \\ A_2(x, y, \kappa) = R_1^{-1} B(\ldots), \end{cases}$$

где $Q(B)$ бинарная группа, k-фиксированный элемент множества Q, а $R_1 x = A_1(x, \kappa, \kappa)$.

Равенства (a_3) выражают изотопии.

2°. n-Арный аналогон теоремы Белоусова о четырех квазигруппах

Теорема 1. Если n-арные квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\} \stackrel{def}{=} N_{2n}$, связаны общей ассоциативностью, т. е. если удовлетворяют равенствам

$$(3) \qquad A_1[A_2(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, \ldots, a_n), \ldots, a_{j+n-1}), \ldots, a_{2n-1}] =$$

$$= A_{2j}[a_1, \ldots, a_{j-1}, A_{2j}(a_j, \ldots, a_{j+n-1}), a_{j+n}, \ldots, a_{2n-1}]$$

для всех $j \in \{2, \ldots, n\}$, то

1. все $Q(A_i), i \in N_{2n}$, изотопны одной и той же n-группы $Q(A)$ обладающей единицей;

и 2. существует бинарная группа $Q(B)$ такая, что

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = B[B(\ldots(B(a_1, a_2), a_3), \ldots), a_{n-1}), a_n].$$

Доказательство теоремы

Если в (3) зафиксируем один $j \in \{2, \ldots, n\}$, (3) является одним законом. Следуя [5, 6], этот закон назовем общим $(1, j)$—ассоциативвным законом.

Так закон

$$(3') \qquad A_1[A_2(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n), a_{n+1} \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}] =$$

$$= A_{2n-1}[a_1, \ldots, a_{n-1}, A_{2n}(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1})]$$

является общим $(1, n)$-ассоциативным законом.

В доказательстве теоремы будем использовать и общий $(1, n-1)$—ассоциативный закон:

$$(3'') \qquad A_1[A_2(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n), a_{n+1}, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}] =$$

$$= A_{2n-3}[a_1, \ldots, a_{n-2}, A_{2n-2}(a_{n-1}, a_n, \ldots, a_{2n-2}), a_{2n-1}].$$

Окажутся полезными следующие обозначения:

$$(4_1) \qquad A_2^{(L,d)}(a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n) = A_2(k, k, \ldots, k, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

$$(4_2) \qquad A_2^{(R,d)}(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}) = A_2, (a_1 a_2, \ldots a_{i-1}, k, k, \ldots, k)$$

$$(4_3) \qquad A_1^{(L,d)}(a_1, a_i, \ldots, a_n) = A_1(a_1, k, k, \ldots, k, a_i, \ldots, a_n)$$

$$(4_4) \qquad A_1^{(R,d)}(a_1, a_2, \ldots, a_i) = A_1(a_1, a_2, \ldots, a_i, k, k, \ldots, k),$$

где d арность операции $A_2^{(L,d)}, A_2^{(R,d)}, A_1^{(L,d)}$ и $A_1^{(R,d)}$, $d \in \{2, \ldots, n-1\}$, а к является фиксированым элементом множества Q. Если $d = n$, то справедливы следующие равенства

$$A_1^{(L,d)} = A_1^{(R,d)} = A_1 \text{ и } A_2^{(L,d)} = A_2^{(R,d)} = A_2.$$

В (3) поставим:

$$(5_1) \quad \begin{cases} a_1 = k & \text{и } a_{n+1} = k \\ a_1 = a_2 = k & \text{и } a_{n+1} = a_{n+2} = k \\ ------------- \\ ------------- \\ a_1 = \ldots = a_{n-2} = k & \text{и } a_{n+1} = \ldots = a_{2n-2} = k, \end{cases}$$

где $к$ фиксированный элемент множества Q.

Получем по очереди:

систему $(n-1)$-арных квазигрупп удовлетворяющих общей $(n-1)$-арной ассоциативности,

систему $(n-2)$-арных квазигрупп удовлетворяющих общей $(n-2)$-арной ассоциативности,

----

систему бинарных квазигрупп удовлетворяющих следующему равенству

$$(A) \quad A_1^{(L,2)}[A_2^{(L,2)}(x, y), z] = C_3[x, C_4(y, z)];$$

где $A_1^{(L,2)}$ и $A_2^{(L,2)}$ определенные ч рез (4_3) и (4_1), а C_3 и C_4 производные операции операций A_{2n-1} и A_{2n}.

В (3) поставим:

$$(5_2) \quad \begin{cases} a_n = k & \text{и } a_{2n-1} = k \\ a_n = a_{n-1} = k & \text{и } a_{2n-1} = a_{2n-2} = k \\ ------------- \\ ------------- \\ a_n = \ldots = a_3 = k & \text{и } a_{2n-1} = \ldots = a_{n+2} = k, \end{cases}$$

где k-фиксированный элемент множества Q из (5_1).

Получим по очереди:

систему $(n-1)$-арных квазигрупп удовлетворяющих общей $(n-1)$-арной ассоциативности,

ситему $(n-2)$-арных квазигрупп удовлетворяющих общей $(n-2)$-арной ассоциативности,

— —

— —

систему тернатных кваизгрупп удволетворяющих общей тернарной ассоциативности,

систему бинарных квазигрупп удовлетворяющих следующему равенству

$$(B) \qquad A_1^{(R,2)}[A_2^{(R,2)}(x, y), z] = C_3'[x, C_4'(y, z)];$$

где $A_1^{(R,2)}$ и $A_2^{(R,2)}$ определенные через (4_4) и (4_2), а C_3' и C_4' производные операции операций A_3 и A_4.

В $(3')$ поставим:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-2} = k \text{ и } a_{n+2} = a_{n+3} = \ldots = a_{2n-1} = k,$$

где κ фиксираованый элемент множества Q из (5_1) и (5_2).

Получим:

$$(C) \qquad A_1^{(R,2)}[A_2^{(L,2)}(x, y), z] = C_3''[x, C_4''(y, z)];$$

где $A_1^{(R,2)}$ и $A_2^{(L,2)}$ определенные через (4_4) и (4_1), а C_3'' и C_4'' производные операции операций A_{2n-1} и A_{2n}.

Учитывая (4_3) и (4_4), находим, что справедливо следующее положение.

Лемма 1. $R_1^{(L,i)} = R_1^{(R,i)} = R_1$ длял любого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, где $R_1 x = A_1(x, \kappa, \kappa, \ldots, \kappa)$, $R_1^{(L,i)} x = A_1^{(L,i)}(x, \kappa, \kappa, \ldots, \kappa)$, а $R_1^{(R,i)} x = A_1^{(R,i)}(x, \kappa, \kappa, \ldots, \kappa)$.

На основании теоремы Белоусова о четырех квазигруппах, учитывая (A), (B), (C), Рез. 1 и Лемму 1, находим, что справедливо следующее положение.

Лемма 2. Если n-арные квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, удовлетворяют равенствам (3), то

1. бинарные квазигруппы $A_1^{(L,2)}$, $A_1^{(R,2)}$, $A_2^{(L,2)}$ и $A_2^{(R,2)}$ изотопны одной и той же группы $Q(B)$, и

2. справедливы следующие равенства

$$(6_1)\qquad \begin{cases} A_1^{(L,2)}(x,y)=B(R_1 x, \ldots) \\ A_2^{(L,2)}(x,y)=R_1^{-1}B(\ldots) \\ A_1^{(R,2)}(x,y)=B(R_1 x, \ldots) \\ A_2^{(R,2)}(x,y)=R_1^{-1}B(\ldots); \end{cases}$$

$R_1 x = A_1(x,k,k,\ldots,k)$, $k \in Q$ фиксированный элемент множества Q из (5_1) и (5_2).

Если n-арные квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, удовлетворяют равенствам (3), то справеделивы и следующие равенства (см. конструкции, определенные через (5_1) и (5_2)):

$$(a)\qquad A_1^{(L,3)}[A_2^{(L,3)}(x,y,z),u,v] = A_3'[x, A_4'(y,z,u),v] = A_5'[x,y,A_6'(z,u,v)] \text{ и}$$

$$(b)\qquad A_1^{(R,3)}[A_2^{(R,3)}(x,y,z),u,v] = \overline{A}_3[x,\overline{A}_4(y,z,u),v] = \overline{A}_5[x,y,\overline{A}_6(z,u,v)];$$

где $A_1^{(L,3)}$, $A_2^{(L,3)}$, $A_1^{(R,3)}$, $A_2^{(R,3)}$, A_3', A_4', A_5', A_6', $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$, $\overline{A}_5$ и $\overline{A}_6$ тернарные квазигруппы.

Так как равенства (a) и (b) являются равенствами (2), то для з-вкази-групп из (a) и (b) справедлви тернарный аанлогон теоремы о четырех квазигруппах (см. Введение).

Положим по очереди: в (a) $x=u=k$, b (b) $z=u=k$, где $\kappa \in Q$ фиксированный элемент из (5_1) и (5_2). Находим:

$$(c)\qquad A_4'(x,y,z) = A_1^{(L,3)}[A_2^{(L,2)}(x,y),z,k] \text{ и}$$

$$(d)\qquad \overline{A}_3(x,\varphi y,z) = A_1^{(R,3)}[A_2^{(R,2)}(x,y),k,z],$$

где $\varphi \in Q!$:

Из (c) и (d), учитывая лемму 2. (с особым вниманиме на второе и четвертое равенство из (6_1), Рез. 3 из Введения и лемму 1., находим, что A_4' и $\overline{A}_3$ изотопны одной и той же з-группе $Q(A)$, где $A(x,y,z)=B[B(x,y),z,]$, а $Q(B)$ бинарная группа изотопна квазигруппам $A_1^{(L,2)}$, $A_1^{(R,2)}$, $A_2^{(L,2)}$ и $A_2^{(R,2)}$ из леммы 2. Отсюда, учитывая тернарный аналогон теоремы о четырех квазигруппах, находим, что $A_1^{(L,3)}$, $A_2^{(L,3)}$, $A_1^{(R,3)}$ и $A_2^{(R,3)}$ изотопны ондой и той же з-групце $Q(A)$, где $A(x,y,z)=B[B(x,y),z]$, $Q(B)$ группа изотопна квазигруппам $A_1^{(L,2)}$, $A_2^{(L,2)}$ $A_1^{(R,2)}$ и $A_2^{(R,2)}$ из леммы 2. Таким образом, учитывая еще Рез. 2. из Введения и лемму 1., находим что справедливо следующее положенние.

Лемма 3. Если n-арные квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, удовлетворяют равенствам (3) то

1. тернарные квазигруппы $A_1^{(L,3)}$, $A_1^{(R,3)}$, $A_2^{(L,3)}$ и $A_2^{(R,3)}$ изотопны одной и той же 3-группе $Q(B_3)$ где $B_3(x, y, z) = B[B(x, y), z]$, а $Q(B)$ группа изотопна квазигруппам $A_1^{(L,2)}$, $A_1^{(R,2)}$ $A_2^{(L,2)}$ и $A_2^{(R,2)}$ из леммы 2., и

2. справедивы следующие равенства

$$(6_2) \qquad \begin{cases} A_1^{(L,3)}(x, y, z) = B_3(R_1 x, \ldots) \\ A_2^{(L,3)}(x, y, z) = R_1^{-1} B_3(\ldots) \\ A_1^{(R,3)}(x, y, z) = B_3(R_1 x, \ldots) \\ A_2^{(R,3)}(x, y, z) = R_1^{-1} B_3(\ldots); \end{cases}$$

$R_1 x = A_1(x, k, k, \ldots, k)$, $k \in Q$ фиксированный элемент из (5_1) и (5_2).

Индуктивное предположение

Если n-арные квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, удовлетворяют равенствам (3), то

1. i-арные квазигруппы $A_1^{(L,i)}$, $A_2^{(L,i)}$, $A_1^{(R,i)}$, $A_2^{(R,i)}$, $i \in \{3, \ldots, n-1\}$, изотопны одной и той же i-группе $Q(B_i)$ обладоющей единицей, где $B_i(a_1 a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i) = B[B_{i-1}(a_1, \ldots, a_{i-1}), a_i]$, $Q(B)$ группа изотопна квазигруппам $A_1^{(L,2)}$, $A_2^{(L,2)}$, $A_1^{(R,2)}$ и $A_2^{(R,2)}$, а $B_2 = B$; и

2. справедливы следующие равенства

$$(6_3) \qquad \begin{cases} A_1^{(L,i)}(a_1, a_2, \ldots, a_i) = B_i(R_1 a_1, \ldots) \\ A_2^{(L,i)}(a_1, a_2, \ldots, a_i) = R_1^{-1} B_i(\ldots) \\ A_1^{(R,i)}(a_1, a_2, \ldots, a_i) = B_i(R_1 a_1, \ldots) \\ A_2^{(R,i)}(a_1, a_2, \ldots, a_i) = R_1^{-1} B_i(\ldots); \end{cases}$$

$R_1 x = A_1(x, \kappa, \kappa, \ldots, \kappa)$, $\kappa \in Q$ фиксированный элемент. из (5_1) и (5_2).

Лемма 4. Если n-арные квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, удовлетворяют равенствам (3), то

1. все $Q(A_j)$, $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, изотопны одной и той же n-группе $Q(A)$; и

2. $A(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = B[B_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n]$, где B и B_{n-1} из лемм 2—3 и индуктивного предположения.

Доказательство

В (3) поставим $a_1 = a_2 = \ldots = a_{j-1} = \kappa$ и $a_{j+n} = a_{j+n+1} = \ldots = a_{2n-1} = \kappa$, где κ из (5_1) и (5_2). Получим

$$(7) \qquad L_{2j-1} A_{2j} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) =$$

$$= A_1^{(R, j)} [A_2^{(L, n-j+1)} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-j+1}), \ldots, x_n]$$

для любого $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, где L_{2j-1} является j-той трансляцией n-квазигруппы A_{2j-1}.

Учитывая факт что, если $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, то $n-j+1 \in \{2, \ldots, n-1\}$, из (7), на основании индуктивного предположения, леммы 2. и леммы 3., находим что A_{2j}, $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, изотопна $Q(A)$, где

$$(8) \qquad A(a_1, \ldots, a_{n-j+1}, \ldots, a_n) = B_j [B_{n-j+1} (a_1, \ldots, a_{n-j+1}), \ldots, a_n].$$

Учитывая лемму 2., лемму 3. и 1. из индуктивного предположения, используя индукцию, находим, что B_i для всех $i \in \{3, \ldots, n-1\}$ можно выразить через B следующим образом:

$$(9) \qquad B_i (a_1, a_2, \ldots, a_i) = B [B (\ldots (B (a_1, a_2), a_3), \ldots), a_i];$$

$Б$ является группой из леммы 2.

Так как $Q(B)$ бинарная группа и $B_2 = B$, из (9) и (8) находим что $Q(A)$ n-группа обладающая единицей, выражающаяся через B образом (9).

Лемма 5. n-арная квазигруппа $Q(A_{2n-3})$, принадлежащая множеству n-квазигрупп $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, удовлетворяющих равенствами (3), изотопна n-группе $Q(A)$ из леммы 4.

B (3″) положим $a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{2n-2} = \kappa$, где κ является фиксированным лементом из (5_1) и (5_2). Получим:

$$(10) \qquad A_{2n-3} (a_1, a_2, \ldots, R_{2n-2} a_{n-1}, a_n) =$$

$$= A_1^{(L, 2)} [A_2^{(R, n-1)} (a_1 a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n],$$

где R_{2n-2} является трансляцией операции A_{2n-2}.

Из (10), учитывая индуктивное предположение и лемму 2., находим, что A_{2n-3} изотопна

$$B [B_{n-1} (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n],$$

т.е. n-группе $Q(A)$ из леммы 4.

Используя метод из доказательства теоремы о чтеырех квазигруппах в [2] (или в [10]), находим, что справедливо и следующее положение.

Лемма 6. n-Арные квазигруппы A_1, A_2, A_{2n}, A_{2n-1}, $j \in \{2, \ldots, n\}$, принадлежащие множеству n-квазигрупп $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, удовлетворяющих равенствам (3), изотопны между собой.

Тепер легко доказывается что справедливо следующие положение.

Лемма 7. Если n-арные квазигруппы $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, удовлетворяют равенствами (3), то

1. n-арные кваизгруппы $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, изотопны одной и той же n-группе $Q(A)$ обладающей единицей, где

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = B[B(\ldots(B(a_1, a_2), \ldots), a_n],$$

а $Q(B)$ группа из леммы 2., и

2. справедливы следующие равенства

$$(6_4) \qquad \begin{cases} A_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = A(R_1 a_1, \ldots) \\ A_2(a_1, a_2, \ldots, a) = R_1^{-1} A(\ldots); \end{cases}$$

$R_1 x = A_1(x, k, к, \ldots, k)$, $k \in Q$ фиксиорваниый элемент из (5_1).

Доказательство

Учитывая леммы 4—6., так как A_{2n-3} одна из n-квазигрупп A_{2j-1}, $j \in \{2, \ldots, n\}$, находим, что 1. часть леммы 7. доказана.

Если в $(3')$ поставим $a_{n+1} = \ldots = a_{2n-1} = к$, где $к \in Q$ из (5_1), получим

$$(11_1) \qquad R_1 A_2(a_1, \ldots, a_{n-1}, a) = A_{2n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}, L_{2n}^{(1)} a_n);$$

$L_{21}^{(1)}$ является 1-й трансляцией n-квазигруппы $Q(A_{2n})$, т.е. $L_{2n}^{(1)} x = A_{2n}(x, к, \ldots, к)$.

В общий $(n-1, n)$-ассоиативный закон из системы законов (3) поставим $a_n = \ldots = a_{2n-2} = k$, где $k \in Q$ из (5_1). Получим

$$(11_2) \qquad A_{2n-1}(a_1 \ldots, a_{n-1}, L_{2n}^{(n)} a_n) = A_{2n-3}(a_1, \ldots, L_{2n-2}^{(1)} a_{n-1}, a_n);$$

$L_{2n-2}^{(1)}$ является 1-й трансляцией n-квазигруппы $Q(A_{2n-2})$.

Учитывая по очереди (11_1), (11_2), (10), 2. и 1. из индуктивного предположения, наодим, что спроведливо второе из равенств (6_4).

Если в (3′) поставим $a_1 = \ldots = a_{n-1} = \kappa$, где κ из (5_1), получим

$$(12_1) \qquad A_1(a_1, \ldots, a_n) = L_{2n-1}^{(n)} A_{2n}(L_2^{(n)-1} a_1, \ldots, a_n);$$

$L_2{}^{(n)}$ является n-й трансляцией n-квазигруппы $Q(A_2)$, а $L_{2n-1}^{(n)}$ n-й трансляцией n-квазигруппы $Q(A_{2n-1})$.

Если в (3″) поставим $a_1 = \ldots = a_{n-2} = a_{n-1} = a_{2n-1} = k$, где κ из (5_1), получим

$$(12_2) \qquad A_{2n-2}(k, x, \ldots, x_{n-1}) = L_{2n-3}^{(n-1)-1} A_1{}^{(R, n-1)}(L_2{}^{(n)} x_1, \ldots, x_{n-1});$$

$L_2^{(n)}$ является n-й трансляцией n-квазигруппы $Q(A_2)$, а $L_{2n-3}^{(n-1)}$ $(n$-$1)$-й трансляцией n-квазигруппы $Q(A_{2n-3})$.

Если в (3″) поставим $a_1 = \ldots = a_{n-2} = a_n = \ldots = a_{2n-2} = k$, где k из (5_1), получим

$$(12_3) \qquad A_{2n-3}(k, k, \ldots, k, x_1, x_2) = A_1{}^{(L, 2)}(L_2{}^{(n-1)} L_{2n-1}^{(1)-1} x_1, x_2);$$

$L_2{}^{(n-1)}$ является $(n-1)$-й трансляцией n-квазигруппы $Q(A_2)$, а

$L_{2n-1}^{(1)}$ 1-й трансляцией n-квазигруппы $Q(A_{2n-1})$.

Если в общий $(n$—$1,\ n)$-ассоциативный закон из ситсемы законов (3) поставим $a_1 = \ldots = a_{n-1} = \kappa$, где κ из (5_1), получим

$$(12_4) \qquad A_{2n}(x_1, \ldots, x_n) = L_{2n-1}^{(n)-1} A_{2n-3}[k, k, \ldots, k, A_{2n-2}(k, x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n];$$

$L_{2n-1}^{(n)}$ является n-й трансляцией n-квазигруппы $Q(A_{2n-1})$.

Из (12_1), учитывая по очереди (12_4), (12_3) и (12_2), находим, что справедливо и первое из равенств (6_4).

Таким образом находим, что Теорема 1. доказана.

3°. Некоторые следствия относящиеся к n-арным группам

Если в (3) положим $A_1 = A_2 = A_{2j-1} = A_{2j}$ для всех $j \in \{2, \ldots, n\}$, учитывая Теорему 1, находим, что спроведливо следуюзщее положение.

Теорема 2. Пусть $Q(G)$ любая n-арная группа. Тогда

1. $Q(G)$ изотопна некоторй n-арной группе $Q(A)$ обладающей единицей; и

2. существует бинарная группа $Q(B)$ такая что $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = B[B(\ldots(B(a_1, a_2), \ldots), a_n]$.

Примечание 1. Известно, что G из n-группы $Q(G)$ можно выразить через B из бинарной группы $Q(B)$ и некоторых автоморфзмов группы $Q(B)$; теорема Хоссу-Глускина ([7], [8], [3]). Теорема 2, может быть сформулирована следующим образом: если $Q(G)$ n-арная группа, тогда, существует бинараня группа $Q(B)$ и подстановки множества Q α_i, $i \in N_n$, такие, что

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = B[B(\ldots(B(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2), \alpha_3 x_3), \ldots), \alpha_n x_n].$$

Так как в Теореме 2. отсуствует описание подстановок α_i, $i \in N_n$, то теорема Хоссу-Глускина является сильнее чем Теорема 2.

Примечание 2. B [3] (стр. 35 и 39) утверждаются следующие положения: 1. L — изотоп*) любой n-квазигруппы являетсь n-лупой; и 2. если n-лупа $Q(L)$ изотопна n-группе $Q(A)$, обладающей единицей, то $Q(L)$ так же является n-группой (обобщенная теорема Алберта). Отсюда, учитывая Теорему 2, находим, что верно следующее положение.

Теорема 2. Каждый L-изотоп любой n-группы является n-группой обладающей единицей.

Теорему 2' будем использовать в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3. Если n-группа обладает единичной последовательностью**), то она обладает единицей.

Доказательство

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ единичная последовательность n-группы $Q(G)$, т. е.

---

*) Пусть $Q(A)$ n-квазигруппа и $L_i(\tilde{K})\, x \stackrel{def}{=} A(k_1, \ldots, k_{i-1}, x, k_i, \ldots, k_{n-1})$. Изотоп

$$A(L_1^{-1}(\tilde{k})\, x_1, \ldots, L_i^{-1}(\tilde{k})\, x_i, \ldots, L_n^{-1}(\tilde{k})\, x_n)$$

называется L-изотопом n-квазигруппы $Q(A)$.

*) Пусть $Q(C)$ n-арный группоид. Если последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ удовлетворяет условию $C(e_1, \ldots, e_{i-1}, x, e_i, \ldots, e_{n-1}) = x$ для любого $x \in Q$, то последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ называется i-единичная последовательность. Если $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ i-единичная последовательность для всех $i \in N_n$, то она называется единичной последовательностью.

Е. Л. Постом в [9] получен следующий результат: B каждой n-группе существует последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ такая, что 1. она является 1 — и n-единичной последовательностью, и 2. каждая ее циклическая перестановка является 1 — и n-единичной последовательностью.

$$G(e_1, \ldots, e_{i-1}, x, e_i, \ldots, e_{n-1}) = L_i(\tilde{e})\, x = x$$

для любоко $x \in Q$ и всех $i \in N_n$. Отсюда следует, что спроведливы следующие равенства

$$(13) \quad G(L_1^{-1}(\tilde{e})\, x_1, \ldots, L_n^{-1}(\tilde{e})\, x_n) = G(Ix_1, \ldots, Ix_n) = G(x_1, \ldots, x_n),$$

где I единичная подстановка множества Q. Из (13), учитывая Теорему 2', находим, что теорема доказана.

Примечание

В [12] В. Д. Белоусовым была разрешена задача о функиональном уравнению общей (i, j)-ассоциативности, $i \neq j$. По видомому, Теорема настоящей работы может быт получена и исодя из этих результатов; см. Примечание в конце работы [11]. Одкано, автору кажется, что этим образом не будет получено более короткое доказательство теоремы настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белоусов В. Д., Ассоциативные системы квазигрупп, УМН, XIII, вып 3 (1958), 243.

[2] Белоусов В. Д. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами, УМН XX, вып 1 (121), 1965, стр. 75—146.

[3] Белоусов В. Д. Сандик М. Д. n-Арные квазигруппы и лупы, Сибирский математический журнал, Том VII, 1, 1966, стр. 31—54.

[4] Чупона Ѓ. , За финитарните операции, Годишен зб. природно-матем. фак. Унив. Скопjе, кн. 12,№ 11 (1959—61), 7—49.

[5] Чупона Ѓ., За n-арните подполугрупи, Билтен на Др. на мат. и физ. од НРМ, кн. XII 1961, 5—13.

[6] Трпеновски Б., Чупона Ѓ., Финитарни асоцијативни операции со неутрални елементи, Билтен на Др. на мат. и Физ. од НРМ, кн. XII, 1961, 15—24.

[7] Hosszú M., On the explicit form of n-group operations, Publ. math., 10, fasc. 1—4 (1963) 88—92 .

[8] Глускин Л. М., О позиционных оперативах, Доклады Академ. наук СССР, 157, № 4 (1964) 167—770

[9] Post E. L., Polyadic groups, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940) 208—350.

[10] Prešić S. B., Zbirka zadataka iz algebre, PMF Beograd, 1962.

[11] Ушан Я., Обобщение теоремы В. Д. Белоусова о четырех квазигруппах на тернарный случай. Билтен на Др. на мат. и физ. од СРМ, кн.

[12] Belousov V., D. Balanced identities in algebras, Faculti of Mathematics, Univ. of Waterloo, 1970.

Janez Ušan

n-ARY ANALOGON OF THE THEOREM BY BELOUSOV ABOUT FOUR QUASIGROUPS AND SOME OF ITS CONSEQUENCES

Summary

The central result of this work is the following theorem:

Theorem 1. If n-ary quasigroups $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, satisfy the general associativity, i.e., the system of the laws (3), for all $j \in \{2, \ldots, n\}$, then:

1. All $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, are isotopie with one and the same n-ary group which has the identity element $Q(A)$; and

2. There exists the binary group $Q(B)$, so that

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = B[B(\ldots(B(a_1, a_2), a_3), \ldots), a_n).$$