NEKI STAVOVI O Z_k I σ^α TRANSFORMACIJAMA

Branislav Martić, Sarajevo

1. Za jednu matricu $\| a_{n\nu} \|$ $(n, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ realnih ili kompleksnih elemenata kažemo da definiše jednu transformaciju

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \tag{1. 1}$$

i jedan postupak (metod) P zbirljivosti kojim je dati niz s_n (ili red $\sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu$ čiji su delimični zbirovi $s_n, n = 0, 1, 2, \cdots$) zbirljiv ka S ako red (1. 1) konvergira i definiše niz $S_n, n = 0, 1, 2, \cdots$, takav da $S_n \to S$ kad $n \to \infty$. Za tako pridruženu graničnu vrednost pišemo

$$P - \lim_{n \to \infty} s_n = S \qquad \text{ili} \qquad P\{s_n\} \to S,\ n \to \infty. \tag{1. 2}$$

Ako je neki niz $s_n, n = 0, 1, 2, \cdots$, P zbirljiv, onda kažemo da (1. 2) postoji i da niz s_n pripada polju zbirljivosti P. Dakle, polje zbirljivosti nekog postupka je skup svih nizova ili redova koji su zbirljivi tim postupkom. Postupak P je regularan ili permanentan ako iz $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ sledi $\lim_{n \to \infty} S_n = s$. Dva različita postupka P i Q su konsistentni ako iz $P\{s_n\} \to S$, $n \to \infty$ i $Q\{s_n\} \to S^*$, $n \to \infty$, sledi da je $S = S^*$. Videti [1], [2]. i [3].

L. L. Silverman i *O. Szász* uveli su u [4] regularne Z_k postupke zbirljivosti kojima odgovaraju trouglaste matrice. Ti su postupci definisani sa

$$l_n = (k+1)^{-1} \sum_{\nu=0}^{k} s_{n-\nu} \qquad (s_{-1} = s_{-2} = \cdots = 0), \tag{1. 3}$$

gde je k fiksiran prirodan broj. Ako $l_n \to l$ kad $n \to \infty$, kažemo da je niz s_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, Z_k zbirljiv ka l.

V. Vučković u [5] generališe jedan postupak koji je ispitivano *R. P. Agnew* u [6] i uvodi regularne σ^{α} $(\alpha > -1)$ postupke zbirljivosti. Njima takodje odgovara trouglasta matrica i definisani su sa

$$\sigma^{\alpha}\{s_n\} = \prod_{\nu=1}^{n}(\alpha+\nu)^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_{\nu}^{n}(\alpha)\,s_{\nu} \tag{1. 4}$$

gde je $\alpha > -1$ i gde su $\sigma_{\nu}^{n}(\alpha)$ *Stirlingovi polinomi* prve vrste definisani na sledeći način:

$$\sigma_0^0(\alpha) = 1, \quad \prod_{\nu=0}^{n-1}(x+\alpha+\nu) = \sum_{\nu=0}^{n}\sigma_{\nu}^{n}(\alpha)\,x^{\nu} \quad (n=1,2,\cdots, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n). \tag{1. 5}$$

Ako $\sigma^{\alpha}\{s_n\} \to S$ kad $n \to \infty$ kažemo da je niz s_n, $n=0,1,2,\cdots$, σ^{α} zbirljiv ka S.

2. U ovom članku dajemo neke nove rezultate u vezi σ^{α} i Z_k postupaka zbirljivosti. Dokazaćemo prvo sledeća tri stava koja važe za svako $\alpha > -1$ i $k=1,2,\cdots$.

STAV 1. *Neka je niz* $\bar{s}_n$, $n=0,1,2,\cdots$, *takav da je* $\bar{s}_n = s_0$ *za* n *parno i* $n=0$, *a za neparno* n *neka je* $\bar{s}_n = s_1$. *Tada je*

$$\sigma^{\alpha} - \lim_{n\to\infty}\bar{s}_n = \frac{1}{2}(s_0 + s_1).$$

STAV 2.

$$\sigma^{\alpha} \to \sigma^{\alpha}\, Z_k, \tag{2. 1}$$

tj. svaki niz σ^{α} *zbirljiv ka* s, *zbirljiv je i iteriranim postupcima* $\sigma^{\alpha}\,Z_k$ *ka istoj vrednosti.*

STAV 3. Z_k *i* σ^{α} *su konsistentni postupci.*

Iz prvog stava vidimo da ako red divergira, tj. ako niz njegovih delimičnih zbirova oscilira izmedju dve vrednosti s_0 i s_1, onda je takav red σ^{α} zbirljiv ka aritmetičkoj sredini tih dvaju vrednosti.

Što se tiče drugog stava očevidno je da važi

$$Z_k \to \sigma^{\alpha}\, Z_k \qquad \text{i} \qquad \sigma^{\alpha} \to Z_k\,\sigma^{\alpha},$$

jer su Z_k i σ^{α} regularni postupci. Medjutim (2. 1) nije očevidno, jer je *Szász* u [7] dao primer niza zbirljivog jednim regularnim postupkom P_1, a koji nije zbirljiv iteriranim postupkom $P_1\,P_2$ gde je P_2 takodje regularan postupak.

3. Dokaz Stava 1. Prethodno ćemo dokazati jednu lemu.

LEMA I. *Izmedju Stirlingovih polinoma prve vrste postoje sledeće relacije:*

a) *za n parno*

$$\sigma_0^n(\alpha)+\sigma_2^n(\alpha)+\cdots+\sigma_n^n(\alpha)=\frac{1}{2}\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)+\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu)\right\}$$

$$\sigma_1^n(\alpha)+\sigma_3^n(\alpha)+\cdots+\sigma_{n-1}^n(\alpha)=\frac{1}{2}\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)-\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu)\right\}$$

b) *za n* neparno

$$\sigma_0^n(\alpha)+\sigma_2^n(\alpha)+\cdots+\sigma_{n-1}^n(\alpha)=\frac{1}{2}\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)+\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu)\right\}$$

$$\sigma_1^n(\alpha)+\sigma_3^n(\alpha)+\cdots+\sigma_n^n(\alpha)=\frac{1}{2}\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)-\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu)\right\}$$

D o k a z. *S* obzirom na (1. 5) imamo

$$\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(\alpha)=\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu),\qquad \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\sigma_\nu^n(\alpha)=\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu),$$

odnosno

$$\sum_{\nu=0}^{n}[1+(-1)^\nu]\,\sigma_\nu^n(\alpha)=\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)+\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu),$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}[1-(-1)^\nu]\,\sigma_\nu^n(\alpha)=\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)-\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu),$$

odakle neposredno slede relacije pod *a*) i *b*).

Sad prelazimo na dokaz stava 1. Primenom σ^α transformacije na niz $\overline{s_n}$ imamo

$$\sigma^\alpha\{\overline{s_n}\}=\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha+\nu)^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(\alpha)\,\overline{s_\nu}.$$

Za *n* parno je

$$\sigma^\alpha\{\overline{s_n}\}=\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha+\nu)^{-1}\{\sigma_0^n(\alpha)\,s_0+\sigma_1^n(\alpha)\,s_1+\sigma_2^n(\alpha)\,s_0+$$

$$+\sigma_3^n(\alpha)\,s_1+\cdots\sigma_{n-1}^n(\alpha)\,s_1+\sigma_n^n(\alpha)\,s_0\}=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha+\nu)^{-1}\{s_0[\sigma_0^n(\alpha)+\sigma_2^n(\alpha)+\cdots+\sigma_n^n(\alpha)]+$$

$$+s_1[\sigma_1^n(\alpha)+\sigma_3^n(\alpha)+\cdots+\sigma_{n-1}^n(\alpha)]\}=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha+\nu)^{-1}\left\{\frac{1}{2}s_0\left[\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)+\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}s_1\left[\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)-\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(s_0+s_1),\ n\to\infty,$$

jer je

$$\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha+\nu)^{-1}\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu)=O\left\{(n!\,n_\alpha)^{-1}(n-2)!\,(n-2)^\alpha\right\}=0(1),\ n\to\infty.$$

Za neparno n je

$$\sigma^\alpha\{s_n\}=\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha+\nu)^{-1}\{\sigma_0^n(\alpha)\,s_0+\sigma_1^n(\alpha)\,s_1+\sigma_2^n(\alpha)\,s_0+\sigma_3^n(\alpha)\,s_1+\cdots$$

$$+\sigma_{n-1}^n(\alpha)\,s_0+\sigma_n^n(\alpha)\,s_1\}=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha+\nu)^{-1}\{s_0[\sigma_0^n(\alpha)+\sigma_2^n(\alpha)+\cdots+\sigma_{n-1}^n(\alpha)]+$$

$$+s_1[\sigma_1^n(\alpha)+\sigma_3^n(\alpha)+\cdots+\sigma_n^n(\alpha)]\}$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha+\nu)^{-1}\left\{\frac{1}{2}s_0\left[\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)+\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}s_1\left[\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+1+\nu)-\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha-1+\nu)\right]\right\}=$$

$$= \frac{1}{2}(s_0 + s_1),\ n \to \infty,$$

Prema tome je

$$\sigma^\alpha \{\bar{s}_n\} \to \frac{1}{2}(s_0 + s_1),\ n \to \infty,$$

čime je stav 1 dokazan.

Dokaz stava 2. σ^α Z_k transformacija niza s_n je s obzirom na (1. 3) i (1. 4),

$$R_n = (k+1)^{-1} \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha+\nu)^{-1} \sum_{\nu=0}^{n}{}' \sigma_\nu^n(\sigma)\, l_\nu =$$

$$= (k+1)^{-1} \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha+\nu)^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)(s_\nu + s_{\nu-1} + \cdots + s_{\nu-k}) =$$

$$= (k+1)^{-1} \left\{ \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha+\nu)^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\, s_\nu + \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha+\nu)^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\, s_{\nu-1} + \cdots \right.$$

(3. 1)
$$\left. + \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha+\nu)^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\, s_{\nu-k} \right\}.$$

Po pretpostavci je niz s_n zbirljiv σ^α postupcima ka s, tj.

(3. 2)
$$\prod_{\nu=1}^{n} (\alpha+\nu)^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\, s_\nu \to s,\ n \to \infty.$$

U [8] autor je dokazao da su $S^{\alpha,\beta}$ postupci translativni u desno, tj. dozvoljeno je snižavati indeks $S^{\alpha,\beta}$ zbirljivog niza s_n. Kako je $S^{\alpha,1} \equiv \sigma^\alpha$, te su i σ^α postupci translativni u desno, Prema tome iz (3. 2) sledi da i

$$\prod_{\nu=1}^{n} (\alpha+\nu)^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\, s_{\nu-1} \to s,\ n \to \infty,$$

tako redom sve do poslednjeg izraza u vitičastoj zagradi (3. 1), tj. i

$$\prod_{\nu=1}^{n} (\alpha+\nu)^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\, s_{\nu-k} \to s,\ n \to \infty,$$

gde je k fiksiran prirodan broj. U vitičastoj zagradi (3. 1) ima $(k+1)$ izraza od kojih svaki konvergira ka s. Prema tome $R_n \to s$ kad $n \to \infty$, čime je stav 2 dokazan.

Dokaz stava 3. Neka je niz $\tilde{s}_n$ zbirljiv σ^α ka S_1 i zbirliv Z_k ka S_2. Kako su σ^α postupci regularni to je niz $\tilde{s}_n$ zbirliv i σ^α Z_k ka S_2. S obzirom na dokazni STAV 2 je $\sigma^\alpha \to \sigma^\alpha Z_k$, pa nora biti $S_1 = S_2$, q. e. d..

4. Na osnovi dokazanog stava 1 imamo

STAV 4. *Ako niz s_n nije Z_k zbirljiv i ako njegova Z_k transformacija* (1. 3) *oscilira izmedju a i b, onda je on σ^α Z_k zbirljiv ka vrednosti* $(a+b)/2$.

U [9] autor je dokazao da važe inkluzije

$$E(\lambda) \subset \sigma^\alpha \qquad (\lambda > 0,\ \alpha > -1),$$

gde je $E(\lambda)$ *Eulerov* postupak zbirljivosti definisan transformacijom

$$E(\lambda)\{s_n\} = (1+\lambda)^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \lambda^\nu s_\nu \qquad (n \to \infty),$$

S obzirom na ovo i dokazani stav 2 imamo i

STAV 5

$$E(\lambda) \subset \sigma^\alpha Z_k \qquad (\lambda > 0,\ \alpha > -1,\ k = 1, 2, \cdots)$$

n. svaki niz zbirljiv $E(\lambda)$ zbirljiv je i iteriranim postupcima σ^α Z_k ka istoj vrednosti, dok obrnuto ne važi.

5. Interesantno bi bilo ispitati da li rezultati dobijeni u ovom članku važe i za generalnite transformacije *A. Jakimovskog* [10] odnosno *M. Bajraktarevića* [11].

LITERATURA

[1] *K. Knopp* — Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin und Heidelberg, Springer — Verlag (1947).

[2] *K. Zeller* — Theorie der Limitierungsverfahren, Berlin. Gottingen. Heidelberg, Springer — Verlag (1958).

[3] *G. H. Hardy* — Divergent Series, Oxford (1949).

[4] *L. L. Silverman* and *O. Szász* — On a class of Nörlund matrices, Ann. of Math. (2) 45, 347—357 (1944).

[5] *V. Vučković* — Eine neue Klasse von Polynomen und ihre Anwendung in der Theorie der Limitierungsverfahren, Publ. Inst. Math. 12, 125—136, Beograd (1958).

[6] *R. P. Agnew* — The Lototsky method for evaluaton of series, Michigan Math. Journal 4, 105—128 (1957).

[7] *O. Szász* — On the product of two summability methods, Ann. Soc. Polon. Math. 25, 75—84 (1953).

[8] *B. Martić* — O jednom skupu dvoparametarskih postupaka zbrojivosti i njihovim primjenama, Rad. Jug. akad. znan. i umjetn. 325, 127—163 (1962).

[9] *B. Martić* — O inkluziji Eulerovih i Vučkovićevih postupka zbirljivosti, Bilten na društvoto na matem. i fiz. od SR Makedonija 12, 29—32 (1961).

[10] *A. Jakimovski* — A generalisation of the Lototsky method of summability, Michigen Math. J. 6, 276—290 (1959).

[11] *M. Bajraktarović* — Quelques remarques sur les procédés de sommabilité lies aux polynomes de Stirling, Glasnik mat. fiz. i astr. 17, 183—187 (1962).

Branislav Martić, Sarajevo

SOME THEOREMS CONCERNING Z_k AND σ^α TRANSFORMATIONS

Summarv

In this paper the following theorems are proved:

THEOREM 1. *Let* s_n *be such that* $s_n = s_0$ *for* $n = 0, 2, 4, \cdots$, *and* $s_n = s_1$ *for* $n = 1, 3, 5, \cdots$. *Then* $\sigma^\alpha - \lim\limits_{n\to\infty} s_n = (s_0 + s_1)/2$.

THEOREM 2.

$$\sigma^\alpha \longrightarrow \sigma^\alpha\ Z_k$$

that is, if s_n *is summable* σ^α, *then it is summable by the iterative methodis* $\sigma^\alpha\ Z_k$ *to the same sum.*

THEOREM 3. *The methods* Z_k *and* σ^α *are consistent*.

THEOREM 4. *If a sequence* s_n *is not summable* Z_k *and if its* Z_k *transformed sequence* (1. 3) *oscillates between* a *and* b, *it is summable* $\sigma^\alpha\ Z_k$ *to the value* $(a + b)/2$.

THEOREM 5.

$$E(\lambda) \subset \sigma^\alpha\ Z_k \qquad (\lambda > 0,\ \alpha > -1,\ k = 1, 2, \cdots),$$

that is, the iterative $\sigma^\alpha\ Z_k$ *methods include the Euler methods of summability.*