O JEDNOJ OPŠTOJ KLASI POSTUPAKA ZBIRLJIVOSTI

BRANISLAV MARTIĆ, Sarajevo

I. — UVOD

U [1] *T. Herlestam* (videti i *Mathematical Reviews*, april 1964) uveo je i ispitivao trouglaste postupke zbirljivosti $W^{(q)} = (\omega_{rv}^{(q)})$, gde je q realan pozitivan broj i gde $\omega_{rv}^{(q)}$ označava koeficijent od z^v u polinomu

$$\binom{qz+n-q}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \omega_{n\nu}^{(q)} z^{\nu}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Za ove $W^{(q)}$ postupke, *J. Karamatine* K^{β} [2] i *V. Vučkovićeve* σ^{α} [3] važe sledeće formule

$$K^{\beta} = C^{(\beta-1)} W^{(\beta)}; \quad \sigma^{\alpha} = C^{(\alpha)} W^{(1)},$$

gde je $C^{(a)}$ *Cesàro*-ov postupak zbirljivosti reda a.

U [4] *D. S. Mitrinović* uveo je brojeve $R_n^r(a, b)$ (n, r celi, a, b kompleksni brojevi i $b \neq o$) kao koeficijente od x^r u polinomu

$$\prod_{r=0}^{n-1} \{x-(a+br)\} = \sum_{r=0}^{n} R_n^r(a, b)\, x^r,$$

dok su u [5] *D. S. Mitrinović* i *R. S. Mitrinović* detaljno ispitivali te brojeve.

U vezi brojeva $R_n^r(a, b)$ primetićemo da možemo formirati trouglastu matricu

$$\| d_{nr} \| = \left\| R_n^r(a,b)\, z^r \Big/ \prod_{r=0}^{n-1} \{z-(a+br)\} \right\|, \quad n, r = 0, 1, 2, \ldots, \ r \leqslant n,$$

koja određuje $(D-M)$ transformaciju niza $\{s_n\}_0^{\infty}$:

$$(D-M)\{s_n\} = \sum_{r=0}^{n} d_{nr}\, s_r, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

kojom je niz $\{s_n\}_0^\infty$ zbirljiv ka s ako $(D-M)\{s_n\} \to s$, kad $n \to \infty$. Do danas niko nije ispitivao ove $(D-M)$ postupke zbirljivosti.

U [6] *M. Bajraktarević* uveo je regularnu trouglastu troparametarsku matricu

$$\| b_{n\nu} \| = \left\| \sigma_\nu^n(\alpha, \rho)\, \beta^\nu \Big/ \prod_{\nu=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \rho_\nu) \right\|, \quad n, \nu = 0, 1, 2, \ldots, \ \nu \leqslant n,$$

gde su α, β, ρ_ν i $\sigma_\nu^n(\alpha, \rho)$ definisani, respektivno, na sledeći način:

$$(1.1)\quad \begin{cases} \rho_n = n + a_n \ (n = 1, 2, \ldots);\ 0 = \rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \cdots; \\ -\infty < l = \lim\inf a_n \leqslant \lim\sup a_n = L < +\infty, n \to \infty; \\ \alpha > -\rho_1, \quad \beta > L - l, \quad \alpha + \beta \neq 0; \\ \prod\limits_{\nu=0}^{n-1} (\alpha + x + \rho_\nu) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha, \rho)\, x^\nu, \quad \prod\limits_{\nu=0}^{n-1} (\alpha + x + \rho_\nu) = 0 \quad \text{za} \quad n = 0. \end{cases}$$

Ovom $\| b_{n\nu} \|$ matricom definisana je $(B; \alpha, \beta, \rho)$ transformacija niza $\{s_n\}_0^\infty$:

$$(1.2)\qquad (B; \alpha, \beta, \rho)\{s_n\} = \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha, \rho)\, \beta^\nu s_\nu \Big/ \prod_{\nu=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \rho_\nu)$$

i ako $(B; \alpha, \beta, \rho)\{s_n\} \to s$, kad $n \to \infty$, kažemo da je niz $\{s_n\}_0^\infty$, zbirljiv $(B; \alpha, \beta, \rho)$ postupcima ka vrednosti s.

Pored ostalih rezultata iz [6] formulisaćemo teoremu 4 na str. 185: *Da bi*

$$[R_{\lambda, 1}\{s_n\} \to s,\ n \to \infty] \Rightarrow [(B; \alpha, \beta, \rho)\{s_n\} \to s,\ n \to \infty]$$

gde je $R_{\lambda, 1}\{s_n\}$ *Riesz*-ova *transformacija niza* $\{s_n\}_0^\infty$, *reda* 1, *definisana sa*

$$(1.3)\quad R_{\lambda, 1}\{s_n\} = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu s_\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda_\nu > 0, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu = +\infty,$$

potrebno je i dovoljno da bude ispunjen uslov

$$(1.4)\quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \frac{\sigma_\nu^n(\alpha, \rho)}{\lambda_\nu} - \frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha, \rho)\, \beta}{\lambda_{\nu+1}} \right| \beta^\nu \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = \mathbf{O}\left\{ \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \rho_k) \right\}, \ n \to \infty.$$

Neka nam D označava neku konačnu otvorenu oblast Euklid-ovog dvodimenzionalnog prostora E_2 čiji *rub* $\overline{D}$ je *dovoljno* regularan, tako da diferencijalni zadatak sa rubnim uslovom

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = o \quad \text{u } D, \; u = o \text{ na } \bar{D},$$

poseduje beskonačno mnogo pozitivnih sopstvenih vrednosti $o < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \to \infty$, kad $n \to \infty$, sa odgovarajućim ortonormiranim sopstvenim funkcijama $\omega_1(P)$, $\omega_2(P), \cdots$. Dalje neka bude L^2 prostor svih funkcija čiji je kvadrat integrabilan u oblasti $D+\bar{D}$, $f(P) \in L^2(D+\bar{D})$ i

$$f(P) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \omega_\nu(P)$$

njen razvitak po ortonormiranim sopstvenim funkcijama *Laplace* ovog operatora, tj.

$$a_\nu = \iint_{D+\bar{D}} f(A)\, \omega_\nu(A)\, d P_A, \quad \nu = 1, 2, \cdots,$$

pri čemu je dP_A površinski element u E_2, dok sa A, P i Q označavamo tačke iz oblasti D.

B. M. Levitan [7] i *T. V. Avadhani* [8] dokazali su, ako $f(P) \in L^2(D+\bar{D})$, da je onda njen razvitak po ortonormiranim sopstvenim funkcijama *Laplace-ovog* operatora zbirljiv *Riesz-ovim* postupkom reda $\geqslant 1/2$ ka sumi $f(Q)$ u svakoj tački $Q \in D$ u kojoj je $f(P)$ neprekidna funkcija.

II. — REZULTATI

Pre nego formulišemo nekoliko teorema u vezi matrice $\|b_{n\nu}\|$ odnosno $(B; \alpha, \beta, \rho)$ postupaka zbirljivosti, primetičemo neke činjenice. Ako stavimo $\beta = 1$ i $\alpha + \rho_{n-1} = \lambda$ za svako $n = 1, 2, \cdots$, matrica $\|b_{n\nu}\|$ postaje klasična *Euler-ova* matrica reda λ. *Euler-ova* transformacija niza $\{s_n\}_0^\infty$ definiše se sa

$$E(\lambda)\{s_n\} = (1+\lambda)^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \lambda^\nu s_\nu, \; \lambda > o, \; n \to \infty. \tag{2.1}$$

Isto tako sve matrice u raspravi [3] tj. σ^α, K^β i $S^{\alpha,\beta}$ transformacija, specijalan su slučaj matrice $\|b_{n\nu}\|$; za $\beta = 1$ i $\rho_n = n$ matrica $\|b_{n\nu}\|$ prelazi u matricu σ^α transformacije; za $\alpha = 0$ i $\rho_n = n$ ona prelazi u matricu K^β transformacije i na kraju za $\rho_n = n$ matrica $\|b_{n\nu}\|$ postaje matrica $S^{\alpha,\beta}$ transformacije. I pored ovih činjenica ne možemo izvesti zaključak da važe na primer inkluzije

$$\sigma^\alpha \subset (B; \alpha, \beta, \rho), \quad K^\beta \subset (B; \alpha, \beta, \rho), \quad S^{\alpha,\beta} \subset (B; \alpha, \beta, \rho) \tag{2.2}$$

ili drugim rečima, ne možemo tvrditi da je za svako α, β i ρ_ν, skup svih nizova zbirljivih bilo σ^α bilo K^β bilo $S^{\alpha,\beta}$ postupcima, sadržan u skupu svih nizova zbirljivih $(B; \alpha, \beta, \rho)$ postupcima. Da zaključci (2.2) nisu tačni utvrđeno je u [9] gde je pokazano da $S^{\alpha,\beta} \subset S^{\alpha+\varepsilon,\, \theta\beta}$, $\varepsilon > 0 \wedge 0 < \theta < 1$.

U ovom članku dokazaćemo

Teorema 1.

$$\{E(\lambda)\{s_n\}\to s, n\to\infty\} \Rightarrow \{(B;\alpha,\beta,\rho)\{s_n\}\to s, n\to\infty\}$$

Teorema 2. Pretpostavka: $f(P)\in L^2(D\cup\bar{D})$. Tvrđenje: *Da bi razvitak funkcije $f(P)$ po ortonormiranim sopstvenim funkcijama Laplaceovog operatora bio $(B;\alpha,\beta,\rho)$ zbirljiv ka sumi $f(Q)$ u svakoj tački $Q\in D$ u k joj je $f(P)$ neprekidna funkcija dovoljno je da postoji niz brojeva λ_v takav da $\lambda_v>0$, $\sum_{v=0}^{\infty}\lambda_v=+\infty$ da bude ispunjen ili uslov* (1.4) *ili uslov*

$$\frac{\sigma_v^n(\alpha,\rho)}{\lambda_v}\geqslant\frac{\sigma_{v+1}^n(\alpha,\rho)\beta}{\lambda_{v+1}},\quad v,n=0,1,2,\cdots,\ \bigwedge\alpha+\beta>0. \tag{2.3}$$

Na kraju ćemo, primera radi, pokazati kako se $(B;\alpha,\beta,\rho)$ postupci mogu uspešno primenjivati i na divergentne trigonometriske nizove. Ovo je od interesa pokazati, jer se tehnika dokaza razlikuje od one koja bi se upotrebila za sve pomenute postupke iz rasprave [3].

Teorema 3. *Divergentni nizovi*

$$\cos\frac{nz}{2},\ z\neq(\pi+2k\pi)/n,\ k=0,\pm1,\cdots;\quad \sin\frac{nz}{2},\ z\neq 2k\pi/n,\ k=0,\pm1,\cdots, \tag{2.4}$$

zbirljivi su $\|b_{nv}\|$ matricom ka o respektivno u oblastima u kojima je jednovremeno $Re\left\{exp\left(\frac{iz}{2}\right)\right\}<1$ *i* $Re\left\{exp\left(-\frac{iz}{2}\right)\right\}<1$.

(Takve su, na primer, oblasti, $\pi+4k\pi<Re(z)<3\pi+4k\pi$, $k=0,\pm1,\cdots$).

III — DOKAZI

Dokaz Teoreme 1. Iz (2.1) je [2]

$$s_v=(-\lambda)^{-v}\sum_{i=0}^{v}(-1)^i\binom{v}{i}(1+\lambda)^i E(\lambda)\{s_i\}, \tag{3.1}$$

(Ovu (3.1) inverziju transformacije (2.1) možemo dobiti i ako na str. 117 u [10] izvršimo smenu $\lambda=r/(1-r)$ u *Euler-Knoppovoj* transformaciji i njenoj inverziji), pa je (B,α,β,ρ) transformacija niza (3.1)

$$(B, \alpha, \beta, \rho)\{s_n\} =$$

$$\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1}\right\}\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(\alpha,\rho)\,\beta^\nu(-\lambda)^{-\nu}\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i\binom{\nu}{i}(1+\lambda)^i E(\lambda)\{s_i\},$$

odnosno ako promenimo red sabiranja (videti lemu 3.1 na str. 132 u [11])

$$(B; \alpha, \beta, \rho)\{s_n\} =$$

$$\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1}\right\}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu(1+\lambda)^\nu\sum_{i=\nu}^{n}\sigma_i^n(\alpha,\rho)\,\beta^i\binom{i}{\nu}(-\lambda)^i E(\lambda)\{s_\nu\}$$

(3.2) $$= \left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1}\right\}\sum_{\nu=0}^{n}R_{n\nu}\,E(\lambda)\{s_\nu\},$$

gde je

$$R_{n\nu} = (-1)^\nu(1+\lambda)^\nu\sum_{i=\nu}^{n}\sigma_i^n(\alpha,\rho)\,\rho^i\binom{i}{\nu}(-\lambda)^{-i} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^\nu\sum_{i=\nu}^{n}\sigma_i^n(\alpha,\rho)\,\beta^i\binom{i}{\nu}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^{i-\nu}$$

(3.3)

$$= \frac{1}{\nu!}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^\nu\frac{d^\nu}{d\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^\nu}\left\{\sum_{i=0}^{n}\sigma_i^n(\alpha,\rho)\,\beta^i\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^i\right\}$$

$$= \frac{1}{\nu!}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^\nu\frac{d^\nu}{d\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^\nu}S_n(-1/\lambda,\alpha,\beta)$$

i

(3.4) $$S_n = S_n(-1/\lambda,\alpha,\beta) = \sum_{i=0}^{n}\sigma_i^n(\alpha,\rho)\,\beta^i\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^i = \prod_{\nu=0}^{n-1}\left(\alpha-\frac{\beta}{\lambda}+\rho_\nu\right).$$

Ako stavimo

$$(3.5)\qquad T_n = T_n(-1/\lambda, \alpha, \beta) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha - \frac{\beta}{\lambda} + \rho_\nu} = \mathbf{O}(\log n), \; n \to \infty,$$

imamo

$$\frac{d S_n}{d(-1/\lambda)} = \beta S_n T_n$$

$$\frac{d^2 S_n}{d(-1/\lambda)^2} = \beta S_n \left\{ \beta T_n^2 + \frac{d T_n}{d(-1/\lambda)} \right\}$$

— — — — — — — —

Metodom totalne indukcije lako je pokazati da je za $\nu = 1, 2, \ldots,$ ν—ti izvod funkcije $S_n(-1/\lambda, \alpha. \beta)$ po $(-1/\lambda)$ jednak proizvodu te funkcije i polinoma ν—tog stepena po funkciji $T_n(-1/\lambda, \alpha, \beta)$ i njenim izvodima. Zato je uzevši ovo u obzir, kao i (3.3), (3.4) i (3.5) za fiksirano ν

$$R_{n\nu} = \mathbf{O}\left\{ \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\alpha - \frac{\beta}{\lambda} + \rho_\nu \right) \log^\nu n \right\} n \to \infty,$$

odnosno

$$\left\{ \prod_{\nu=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \rho_\nu)^{-1} \right\} R_{n\nu} = \mathbf{O}\left\{ \prod_{\nu=0}^{n-1} \left[\frac{\alpha - \frac{\beta}{\lambda} + \rho_\nu}{\alpha + \beta + \rho_\nu} \right] \log^\nu n \right\}, \; n \to \infty.$$

Medjutim, kako je

$$\frac{\alpha - \frac{\beta}{\lambda} + \rho_\nu}{\alpha + \beta + \rho_\nu} = 1 + \frac{-\beta - \frac{\beta}{\lambda}}{\alpha + \beta + \rho_\nu} < e^{\frac{-\beta - \frac{\beta}{\lambda}}{\alpha + \beta + \rho_\nu}},$$

to je

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha - \frac{\beta}{\lambda} + \rho_\nu}{\alpha + \beta + \rho_\nu} \right) \leqslant \prod_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{-\beta - \frac{\beta}{\lambda}}{\alpha + \beta + \rho_\nu}} = e^{-\left(\beta + \frac{\beta}{\lambda}\right) \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha + \beta + \rho_\nu}},$$

pa, na kraju za fiksirano ν, imamo

$$(3.6)\quad \left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1}\right\}R_{n\nu}=O\left\{e^{-\left(\beta+\frac{\beta}{\lambda}\right)\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha+\beta+\rho_\nu}}\log^\nu n\right\}\to$$

$\to o, n\to\infty$, jer je $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\dfrac{1}{\alpha+\beta+\rho_\nu}$ reda $\log n$ kad $n\to\infty$.

Ako uzmemo niz $s_n=1$, $n=0, 1, 2,\cdots$, onda je i $E(\lambda)\{s_n\}=1$ i $(B;\alpha,\beta,\rho)\{s_n\}=1$ za svako n pa nam (3.2) daje

$$(3.7)\quad \left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1}\right\}\sum_{\nu=0}^{n}R_{n\nu}=1.$$

Na osnovu rekurentuih formula ([6] str. 184)

$$\sigma_i^{n+1}(\alpha,\rho)=(\alpha+\rho_n)\,\sigma_i^n(\alpha,\rho)+\sigma_{i-1}^n(\alpha,\rho),\ n=0,1,2,\cdots,\ i=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,$$

kao i elementarne formule $\binom{i+1}{\nu}=\binom{i}{\nu-1}+\binom{i}{\nu}$ imamo s obzirom na (3.3)

$$R_{n\nu}=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^\nu\sum_{i=\nu}^{n}\left\{(\alpha+\rho_{n-1})\,\sigma_i^{n-1}(\alpha,\rho)+\sigma_{i-1}^{n-1}(\alpha,\rho)\right\}\beta^i\binom{i}{\nu}(-\lambda)^{i-\nu}$$

$$=(\alpha+\rho_{n-1})R_{n-1,\nu}+\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^\nu\sum_{i=0}^{n}\sigma_{i-1}^{n-1}(\alpha,\rho)\binom{i}{\nu}\beta^i(-\lambda)^{i-\nu}$$

$$=(\alpha+\rho_{n-1})R_{n-1,\nu}+\beta\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^\nu\sum_{i=0}^{\infty}\sigma_i^{n-1}(\alpha,\rho)\left\{\binom{i}{\nu-1}+\binom{i}{\nu}\right\}\beta^i(-\lambda)^{i+1-\nu}$$

$$=(\alpha+\rho_{n-1})R_{n-1,\nu}+\beta\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)R_{n-1,\nu-1}-\frac{\beta}{\lambda}R_{n-1,\nu}.$$

(Ovde smo koristili činjenicu da je $\sigma_i^n(\alpha,\rho)=0$ za $i>n$ kao i da je $\sigma_i^n(\alpha,\rho)=0$ za $i<o$). Prema tome imamo

$$(3.8)\quad R_{n\nu}=\left(\alpha+\rho_{n-1}-\frac{\beta}{\lambda}\right)R_{n-1,\nu}+\beta\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)R_{n-1,\nu-1},$$

pa ako stavimo

$$P_n = \left\{ \prod_{\nu=0}^{n-1} |\alpha+\beta+\rho_\nu|^{-1} \right\} \sum_{\nu=0}^{\infty} |R_{n\nu}|,$$

vidimo iz (3.8) da je

$$P_n \leqslant \frac{\left| \alpha + \rho_{n-1} - \frac{\beta}{\lambda} \right| + \beta + \frac{\beta}{\lambda}}{|\alpha+\beta+\rho_{n-1}|} P_{n-1}.$$

Odavde je za $\alpha + \rho_{n-1} - \frac{\beta}{\lambda} \geqslant o, P_n \leqslant P_{n-1}$ tj. niz $\{P_n\}_0^\infty$ monotono ne raste. Dakle

$$\left\{ \prod_{\nu=0}^{n-1} |\alpha+\beta+\rho_\nu|^{-1} \right\} \sum_{\nu=0}^{\infty} |R_{n\nu}| \leqslant C, \quad \rho_n \geqslant \frac{\beta}{\lambda} - \alpha$$

Kako prema (1.1) niz $\rho_n \to \infty$ kad $n \to \infty$ to za fiksirano α, β i λ uvek se može učiniti da bude $\rho_n \geqslant \frac{\beta}{\lambda} - \alpha$, počev od nekog $n \geqslant N$. Prema tome je

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} |\alpha+\beta+\rho_\nu|^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} |R_{n\nu}| \leqslant C, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.9}$$

jer je ovaj izraz za $n < N$ sigurno ograničen.

S obzirom na (3.6), (3.7) i (3.9) vidimo da su ispunjeni dovoljni uslovi za regularnost matrice

$$\left\| \left\{ \prod_{\nu=0}^{n-1} (\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1} \right\} R_{n\nu} \right\|$$

što sa (3.2) dokaznje Teoremu 1.

Dokaz Teorema 2. Na osnovu pomenutih rezultata *Bajraktarevića*, *Levitana* ili *Avadhania* dokaz Teorema sa uslovom (1.4) je očevidan, pa još ostaje da se pokaže da ona važi i sa uslovom (2.3).

Iz (1.3) je

$$s_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu} \{A_\nu B_\nu - A_{\nu-1} B_{\nu-1}\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.10}$$

gde je

$$A_n = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu s_\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu, \quad B_n = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu, \quad A_{-1} = B_{-1} = 0,$$

pa je $(B; \alpha, \beta, \rho)$ transformacija niza (3. 10)

$$(\mathrm{B};\alpha,\beta,\rho)\{s_n\}=\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1}\right\}\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(\alpha,\rho)\,\beta^\nu\frac{1}{\lambda_\nu}(A_\nu B_\nu-A_{\nu-1}B_{\nu-1})$$

$$=\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1}\right\}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\frac{\sigma_\nu^n(\alpha,\rho)\,\beta^\nu}{\lambda_\nu}-\frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha,\rho)\,\beta^{\nu+1}}{\lambda_{\nu+1}}\right]A_\nu B_\nu+\frac{\beta^n B_n}{\lambda_n}A_n\right\}.$$

Dalje je

$$(3.11)\quad 1=\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1}\right\}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\frac{\sigma_\nu^n(\alpha,\rho)\,\beta^\nu}{\lambda_\nu}-\frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha,\rho)\,\beta^{\nu+1}}{\lambda_{\nu+1}}\right]B_\nu+\frac{\beta^n B_n}{\lambda_n}\right\},$$

što lako uvidjamo ako stavimo da je $s_n=1$ za svako $n=0,1,2,\ldots$, jer je tada i $(\mathrm{B};\alpha,\beta,\rho)\{s_n\}=1$ i $A_n=1$ za svako $n=0,1,2,\ldots$.

Sada ćemo pokazati da ako je ispunjen uslov (2.3) onda je ispunjen i uslov (1.4). Na osnovu (2.3) i (3.11) imamo

$$0\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\frac{\sigma_\nu^n(\alpha,\rho)}{\lambda_\nu}-\frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha,\rho)\,\beta}{\lambda_{\nu+1}}\right|\beta^\nu\sum_{k=0}^{\nu}\lambda_k=\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\frac{\sigma_\nu^n(\alpha,\rho)}{\lambda_\nu}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma_{\nu+1}^n(\alpha,\rho)\,\beta}{\lambda_{\nu+1}}\right]\beta^\nu\sum_{k=0}^{\nu}\lambda_k=\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)\right\}-$$

$$-\frac{\beta^n B_n}{\lambda_n}\leqslant\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu),$$

tj. uslov (1.4). Ovim je T e o r e m a 2 dokazana. Primetićemo da je uslov (2.3) specijalniji ali i jednostavniji od uslova (1.4).

D o k a s T e o r e m e 3. Prvo ćemo izvesti dokaz za niz $\cos\frac{nz}{2}$; $z\mp(\pi+2k\pi)/n$, $k=0,\pm1,\ldots$.

Za ovaj niz je $S_n=\cos\frac{nz}{2}$

$$(B;\alpha,\beta,\rho)\{S_n\}=\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1}\right\}\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(\alpha,\rho)\,\beta^\nu\cos\frac{\nu z}{2}=$$

$$(3.12)\quad = \frac{1}{2}\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1}\right\}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(\alpha,\rho)\,\beta^\nu e^{\frac{i\nu z}{2}} + \sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(\alpha,\rho)\,\beta^\nu e^{\frac{-i\nu z}{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-1}\right\}\left\{\prod_{\nu=0}^{n-1}\left(\alpha+\beta e^{\frac{iz}{2}}+\rho_\nu\right) + \prod_{\nu=0}^{n-1}\left(\alpha+\beta e^{\frac{-iz}{2}}+\rho_\nu\right)\right\}$$

Primetićemo da je

$$\frac{|\alpha+\beta z+\rho_v|}{\alpha+\beta+\rho_v} = \left\{1+\frac{\beta^2[|z^2|-1]+2\beta(\alpha+\rho_v)[Re(z)-1]}{(\alpha+\beta+\rho_v)^2}\right\}^{1/2}$$

$$\leqslant e^{\frac{1}{2}\left\langle\{\beta^2[|z^2|-1]+2\beta(\alpha+\rho_v)[Re(z)-1]\}(\alpha+\beta+\rho_v)^{-2}\right\rangle}$$

pa nam (3.12) daje

$$2\,|(B;\alpha,\beta,\rho_\nu)\{S_n\}| \leqslant \prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{\left|\alpha+\beta e^{\frac{iz}{2}}+\rho_\nu\right|}{(\alpha+\beta+\rho_\nu)} + \prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{\left|\alpha+\beta e^{\frac{-iz}{2}}+\rho_\nu\right|}{(\alpha+\beta+\rho_\nu)}$$

$$\leqslant \prod_{n=0}^{n-1} e^{\left\langle\left\{\frac{\beta^2}{2}[|e^{iz}|-1]+\beta(\alpha+\rho_\nu)[Re(e^{iz/2})-1]\right\}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-2}\right\rangle} +$$

$$(3.13)$$

$$+\prod_{\nu=0}^{n-1} e^{\left\langle\left\{\frac{\beta^2}{2}[|e^{-iz}|-1]+\beta(\alpha+\rho_\nu)[Re(e^{-iz/2})-1]\right\}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-2}\right\rangle}$$

$$= e^{\left\{\frac{\beta^2}{2}[|e^{iz}|-1]\sum_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-2}\right\}}$$

$$\times\, e^{\left\{\beta[Re(e^{iz/2})-1]\sum_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\rho_\nu)(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-2}\right\}} +$$

$$+\, e^{\left\{\frac{\beta^2}{2}[|e^{-iz}|-1]\sum_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-2}\right\}}$$

$$\times\, e^{\left\{\beta[Re(e^{-iz/2})-1]\sum_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\rho_\nu)(\alpha+\beta+\rho_\nu)^{-2}\right\}}$$

Pošto prema (1.1), $\sum_{\nu=o}^{n} \rho_{\nu}^{-1} \to +\infty$, kad $n \to \infty$ i red $\sum_{\nu=o}^{\infty} \rho_{\nu}^{-2}$ konvergira, to iz (3.13) sledi da

$$(B; \alpha, \beta, \rho)\{s_n\} \to o, n \to \infty$$

za svako z za koje je istovremeno $Re(e^{iz/2}) < 1$ i $Re(e^{-iz/2}) < 1$, čime je što se tiče prvog niza dokaz završen.

Prema samom dokazu vidimo da je nomenuti niz i uniformno $(B; \alpha, \beta, \rho)$ zbirljiv ka o u svakoj odraničenoj i zatvorenoj oblasti sadržanoj istdvremeno u oblastima $Re\left\{exp\left(\frac{iz}{2}\right)\right\} < 1$ i $Re\left\{exp\left(-\frac{iz}{2}\right)\right\} < 1$.

Što se tiče dokaza za drugi niz on je sličan prethodnom dokazu.

IV — NEKE NAPOMENE

Pored rasprave [6], $(B; \alpha, \beta, \rho)$ postupcima zbirljivosti je posvećena i rasprava: *B. Martić, On the B Transformations of M. Bajraktarević*, Glasnik mat. fiz. i astr., T. 19 No 3—4. U toj raspravi je rešen problem $(B; \alpha, \beta, \rho)$ zbirljivosti *C auchyevog* proizvoda dva reda i dat jedan kriterijum za $(B; \alpha, \beta, \rho)$ zbirljivost redova i nizova.

U raspravi: *A generalisation of the Lototsky method of summability*, Michigan Math. J. 6 1959, 277—290, *A Jakimovski* je generališući *Lototskyev* postupak (videti i [10]) uveo $t_n = [F, d_n]$ transformaciju niza $\{s_n\}_o^{\infty}$ na sledeći način:

$$t_o = s_o, \; t_n = [(1 + d_n)!]^{-1} \sum_{m=o}^{n} p_{nm} s_m \quad (n \geqslant 1)$$

a gde su težine p_{nm} definisane relacijama

$$(x + d_n)! \equiv \prod_{m=1}^{n} (x + d_m) \equiv \sum_{m=o}^{n} p_{nm} x^m;$$

$$p_{oo} = 1; \; p_{nm} = O, \; m < O \wedge m > n.$$

i gde je $\{d_n\}_1^{\infty}$ $(d_n \neq -1, n \geqslant 1)$ dati niz.

Na kraju članka [6] *Bajraktarević* je dokazao relaeije

$$[F, d_n] = (B; \alpha, 1, \rho)\{s_n\}$$

$$\left[F, \frac{d_n}{\beta}\right] = (B; \alpha/\beta, 1, \rho/\beta) \{s_n\} = (B; \alpha, \beta, \rho) \{s_n\}$$

gde je

$$d_n = \alpha + \rho_{n-1} \neq -1 \, (n \geqslant 1), \rho = \{\rho_n\}_o^{\infty}, \frac{\rho}{\beta} = \left\{\frac{\rho_n}{\beta}\right\}_o^{\infty}, \beta > O$$

a koje omogućuju prelaz od transformacija $[F, d_n]$ na transformacije $(B; \alpha, \beta, \rho)$ i obrnuto za proizvolan niz $d_n = \alpha + \rho_{n-1} \neq -1, n = 1, 2, \ldots$.

Ovo poslednje je koristio *B. Martić* u svojoj pomenutoj raspravi.

BIBLIOGRAFIJA

[1] T. Herlestam, On a family of summation methods. I, II. Lunds Univ. 2Ars skrift Avd. 2 (N. F.) Tysiogr. Sallsk. Handl. 70 no. 11, 23 pp. 1959 i ibid. 70, no. 12, 13 pp. (1959).

[2] J. Karamata, Théorèmes sur la sommabilité exponentiele et d'autres sommabilités s'y ratachant. Mathematica, Cluj 9 (1935), 164—178.

[3] V. Vučković, Eine neue Klasse von Polynomen und ihre Anwendung in der Theorie der Limitierungsverfahren. Publ. de l'Inst. Math. Acad, Serbe Sc. Beograd 12, (1958) 124—136.

[4] D. S. Mitrinović, Sur une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 252, 1961, p. 2354—2356.

[5] D. S. Mitrinović et R. S. Mitrinović Tableaux d'une classa de nombres reliés au nombres de Stirling. Publ. Elektroteh. fak. serija: matem. i fiz. no. 77 (1962), str. 1—77 Beograd.

[6] M. Bajraktarević, Quelques remarques sur les procédés de sommabilite liés aux polynômes de Stirling. Glasnik matematičko-fizički i astronomski, T. 17, broj 3—4 str. 183—187 Zagreb (1962).

[7] B. M. Levitan, O razloženii po sobstvenım frnkcijam operatora Laplasa. Dokladi Akademii nauk SSSR XC no. 2 (1953). 133—135.

[8] T. V. Avadhani, On the summability of eigenfunction expansions .J Indian Math. Soc. XVIII. 1 (1954), 9—18.

[9] B. Martıć, The mutual inclusion of $S^{\alpha,\beta}$ methods of summation. Publ. Inst Math. Tome 2 (16), pp. 93—98, Beograd 1962.

[10] R. P. Agnew, The Lototsky method for evaluation of series. Michigan Math' Journal 4 (1957), 105—128.

[11] B. Martić, O jednom skupu dvoparametarskih postupaka zbrojivosti i njihovim primenama. Rad Jug. Akad. znan. i umjetn. knj. 352, str. 127—163, Zagreb (1962).

[12] D. S. Mitrinović, Zbirka zadataka iz matematike za prvi stepen nastave na fakultetima. Beograd (1962).

B. Мартић, Sarajevo

SUR UNE CLASSE GÉNÉRALE DES PROCÉDÉS DES SOMMATIONS

(Résumé)

Cette note est consacré à l'étude d'une classe des procédés des sommations, notés $(B; \alpha, \beta, \rho)$ dont la matrice $\| b_{nv} \|$ est donnée par

$$\| b_{nv} \| = \left\| \sigma_v^n (\alpha, \rho) \beta^v \Big/ \prod_{v=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \rho_v) \right\| \qquad (v \leqslant n \wedge v, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

où la suite $\rho = \{\rho_n\}_0^\infty$ satisfait aux conditions (1.1). Dans [6] *M. Bajraktarević* a introduit cette classe des procédés des sommations.

L'auter démontre

Théorèm 1. *De*

$$E(\lambda)\{s_n\} \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty$$

résulte

$$(B; \alpha, \beta, \rho)\{s_n\} \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty$$

où $E(\lambda)\{s_n\}$ est la transformation *d'Euler*, de la suite $\{s_n\}_0^\infty$ definie par (2.1).

Dans le Théorèm 2 *on donne une applicati n des procédés* $(B; \alpha, \beta, \rho)$ *aux problèmes de sommation des séries de Fourier généralisées.* La demonstration du theoreme est fondée sur le theoreme 4 dans [6] et une évaluation *de Levitan* [7] et *d'Avadhani* [8].

Enfin dans le Théorèm 3 *on montre que les séries trigonométriques divergentes* (2.4) *sont sommable uniformément par les procédés* $(B; \alpha, \beta, \rho)$ *vers* 0 *dans chaque région bornée et fermée qui est contenue dans la région définie par* $Re(e^{iz/2}) < 1$ *et* $Re(e^{-iz/2}) < 1$.