Математички Билтен
16 (XLII)
1992 (105-111)
Скопје, Македонија

ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА НА КАРДАНОВАТА ФОРМУЛА

Н. Фетах, К. Тренчевски

Апстракт. Во оваа статија ќе бидат изложени некои класи равенки од n-ти ред кои имаат решенија во радикали и кои претставуваат обопштување на Кардановата формула.

За да го изложиме начинот на кој се доаѓа до соодветните формули, ќе разгледаме еден специјален случај. Нека $n=7$. Треба да најдиме равенка од седми степен чие решение е од облик

$$x = \sqrt[7]{a+b} + \sqrt[7]{a-b} \tag{1}$$

каде што a и b се некои броеви кои ќе зависат од коефициентите на равенката. Од $x=M+N$, каде што $M=\sqrt[7]{a+b}$ и $N=\sqrt[7]{a-b}$, добиваме

$$x^7 = 2a + 7MN(M^5+N^5) + 21M^2N^2(M^3+N^3) + 35M^3N^3(M+N).$$

Користејќи дека

$$M^3+N^3 = (M+N)^3 - 3MN(M+N) = x^3 - 3MNx, \quad \text{и}$$

$$M^5+N^5 = (M+N)^5 - 5MN(M^3+N^3) - 10M^2N^2(M+N) = x^5 - 5MNx^3 + 5M^2N^2x$$

добиваме дека равенката е од облик

$$x^7 - 7MNx^5 + 14M^2N^2x^3 - 7M^3N^3x - 2a = 0,$$

или ставајќи $-7MN=p$ добиваме

$$x^7 + 7\left(\frac{p}{7}\right)x^5 + 14\left(\frac{p}{7}\right)^2x^3 + 7\left(\frac{p}{7}\right)^3x - 2a = 0. \tag{2}$$

Останува да се најде уште b во формулата (1). Од (1) се добива

$$M^7N^7 = a^2-b^2.$$

Бидејќи $MN=-p/7$, имаме $b=\sqrt{a^2+(p/7)^7}$. Заменувајќи го $-2a$ со q се добива дека решението на равенката

$$x^7 + 7\left(\frac{p}{7}\right)x^5 + 14\left(\frac{p}{7}\right)^2x^3 + 7\left(\frac{p}{7}\right)^3x + q = 0 \tag{3}$$

е

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{7}\right)^7}\right)^{1/7} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{7}\right)^7}\right)^{1/7}. \tag{4}$$

Уочуваме дека со овој метод за n=3 се добива Кардановата формула. За првите неколку непарни броеви се добива дека

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n} \qquad (5)$$

е решение на следните равенки

$n=3$: $x^3+3(p/3)x+q=0$

$n=5$: $x^5+5(p/5)x^3+5(p/5)^2x+q=0$

$n=7$: $x^7+7(p/7)x^5+14(p/7)^2x^3+7(p/7)^3+q=0$

$n=9$: $x^9+9(p/9)x^7+27(p/9)^2x^5+30(p/9)^3x^3+9(p/9)^4x+q=0$

$n=11$: $x^{11}+11(p/11)x^9+44(p/11)^2x^7+77(p/11)^3x^5+$
$+55(p/11)^4x^3+11(p/11)^5x+q=0$.

Сега се поставува следново прашање: За произволно даден непарен број n, која е равенката од n-ти степен чие решение е зададено со (5)? Може да се покаже, користејќи го Паскаловиот триаголник, дека тоа е следнава равенка

$$\sum_{k=0}^{(n-1)/2} D_{k+1}^{n+1-k}\left(\frac{p}{n}\right)^k x^{n-2k} + q = 0 \qquad (6)$$

каде што

$$D_s^t = \binom{t-2}{s-2} + \binom{t-1}{s-1} = \frac{t+s-2}{t-1}\binom{t-1}{s-1}$$

па

$$D_{k+1}^{n+1-k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}. \qquad (7)$$

Со тоа значи добиваме дека (5) е решение на равенката (6) ако n е непарен број и D_{k+1}^{n+1-k} е зададено со (7).

Сега на друг начин ќе го добиеме овој резултат и ќе видиме како со (5) може да се опишат сите n корени на равенката (6).

Нека $\alpha_n, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1$ се такви броеви што

$$\sin nx = \alpha_n(\sin x)^n + \alpha_{n-2}(\sin x)^{n-2} + \ldots + \alpha_1(\sin x). \qquad (8)$$

Ќе покажеме дека

$$\alpha_{n-2k} = (-1)^{(n-2k-1)/2}\cdot 2^{n-1-2k}\cdot\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} \qquad (9)$$

каде што $k\in\{0,1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}\}$. Навистина, функцијата $f(x)=\sin nx$ е единствена функција таква што

$$f(0) = 0,\ f'(0) = n \text{ и } f''(x) = -n^2 f(x). \tag{10}$$

Но, десната страна на (8), каде што α_{n-2k}, $k\in\{0,1,\dots,\frac{n-1}{2}\}$ се зададени со (9), ги задоволуваат условите (10), па затоа равенството (8) важи.

Нека е дадена равенката (6) каде што p и q се произволни комплексни броеви и $p\neq 0$ (ако $p=0$ равенката (6) е тривијална). Тогаш ставаме $x=2\sqrt{(-p)/n}\cdot y$ во (6) и добиената равенка ја множиме со $(-1)^{(n-1)/2}\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{n/(-p)})^n$ и добиваме

$$\alpha_n y^n + \alpha_{n-2}y^{n-2} + \dots + \alpha_1 y + (-1)^{(n-1)/2}\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{n/(-p)})^n\cdot q = 0.$$

Ставајќи $y=\operatorname{tg}\theta/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}$ $(=\sin\theta)$, според (8), добиваме

$$\sin n\theta = (-1)^{(n+1)/2}\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{n/(-p)})^n q,$$

$$\operatorname{tg} n\theta = (-1)^{(n+1)/2}\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{n/(-p)})^n q/\sqrt{1-\tfrac{1}{4}q^2(\tfrac{n}{-p})^n}.$$

Сега, користејќи ја формулата

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg} n\theta}{1-i\operatorname{tg} n\theta},$$

може да се најдат сите n корени $\operatorname{tg}\theta_j$, $1\le j\le n$, бидејќи

$$\sqrt[n]{\frac{1+i\operatorname{tg} nx}{1-i\operatorname{tg} nx}}$$

има n вредности. Потоа за n-те решенија на равенката (6) добиваме

$$x_j = 2\sqrt{(-p)/n}\cdot\operatorname{tg}\theta_j/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta_j},\quad j\in\{1,\dots,n\}$$

и сите решенија се изразени во радикали. На тој начин, за решенијата x_j изразени преку p и q, по средувањето се добива

$$x_j = -i\sqrt{(-p)/n)}\left(\sqrt[n]{\sqrt{1-\tfrac{1}{4}q^2(\tfrac{n}{-p})^n}+i(-1)^{(n+1)/2}\cdot\tfrac{1}{2}(\tfrac{n}{-p})^{n/2}q}\sqrt{\beta_j} - \right.$$
$$\left. -\sqrt[n]{\sqrt{1-\tfrac{1}{4}q^2(\tfrac{n}{-p})^n}-i(-1)^{(n+1)/2}\cdot\tfrac{1}{2}(\tfrac{n}{-p})^{n/2}q}(\sqrt{\beta_j})^{-1}\right)$$

каде што β_j, $1\le j\le n$, се n-те корени од 1. Користејќи дека n е непарен број, овие решенија се доведуваат до следниот облик

$$x_j = \left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+(\frac{p}{n})^n}\right)^{1/n}\sqrt{\beta_j} + \left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+(\frac{p}{n})^n}\right)^{1/n}(\sqrt{\beta_j})^{-1}$$

$$x_j = \left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+(\frac{p}{n})^n}\right)^{1/n}(\sqrt{\beta_j})^{-1} - \frac{\frac{p}{n}\sqrt{\beta_j}}{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+(\frac{p}{n})^n}\right)^{1/n}}.$$

Овде се јавува следниот проблем: $\sqrt{\beta_j}$ може да прима 2n вредности, и притоа само n од нив треба да се земат. Бидејќи n е непарен број, сите 2n вредности на $\sqrt{\beta_j}$ ги примаат вредностите на β_j и $-\beta_j$, $1 \le j \le n$, и затоа можните 2n решенија на (6) можеме да ги групираме во две групи од по n решенија во следниот облик

$$x_j = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n} - \frac{\frac{p}{n}}{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}} \tag{11}$$

$$x_j' = -\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n} + \frac{\frac{p}{n}}{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}} \tag{11'}$$

каде што $\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}$ може да ги прима сите свои n вредности. Вредностите x_j' не се решенија на равенката (6) бидејќи во граничен случај кога $p \to 0$ вредностите x_j' не се корени на равенката $x^n+q=0$ добиена од (6) за $p=0$. Затоа сите n корени на равенката (6) се зададени со (11). Притоа ако $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{n}\right)^n}$ го промени знакот, повторно ги добиваме истите n корени на (6).

Да уочиме дека равенката (6) ја решивме решавајќи ја притоа равенката sinnx=C. Се прашуваме дали можеме да решаваме и други равенки слични на (6) ако притоа ги сведиме на cosnx=C, chnx=C или shnx=C. Одговорот е: ако n е непарен број, тогаш равенките cosnx=C, chnx=C и shnx=C водат кон решавање на истата равенка (6). Меѓутоа, ако n е парен број, тогаш равенката cosnx=C (односно chnx=C) води кон решавање на следната равенка

$$\sum_{k=0}^{n/2} x^{n-2k}\left(\frac{p}{n}\right)^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} + q = 0. \tag{12}$$

Притоа се користи дека

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \cdot 2^{n-1-2k} \cdot \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} \cos^{n-2k}\theta. \tag{13}$$

Во равенката (12) ставаме смена $x=2\sqrt{(-p)/n}\cdot y$, а потоа добиената равенка ја множиме со $\frac{1}{2}(\sqrt{n/(-p)})^n$ и добиваме

$$\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \cdot 2^{n-1-2k} \cdot \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} y^{n-2k} + \frac{q}{2}(\sqrt{n/(-p)})^n = 0.$$

Земаме смена $y=1/\sqrt{1+tg^2\theta}$ (=cosθ) и добиваме

$$\cos n\theta = -\frac{q}{2}\left(\frac{n}{-p}\right)^{n/2}$$

$$tg n\theta = \sqrt{\frac{4}{q^2}\left(\frac{-p}{n}\right)^n - 1}.$$

Аналогно на случајот кога n е непарен број, во овој случај можните решенија се запишуваат во следниов облик

$$x_j = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}\sqrt{\beta_j} - \frac{\frac{p}{n}}{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}\sqrt{\beta_j}}$$

каде што β_j, $1 \le j \le n$, се n-те корени од 1. Бидејќи n е парен број, $\sqrt{\beta_j}$ ги прима вредностите $\sqrt[n]{1}$ и $\sqrt[n]{-1}$, па затоа можните 2n решенија можеме да ги групираме во две групи од по n решенија во следниов облик

$$x_j = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n} - \frac{\frac{p}{n}}{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}} \tag{14}$$

$$x'_j = \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n} - \frac{\frac{p}{n}}{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{n}\right)^n}\ ^{1/n}} \tag{14'}$$

каде што $\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}$ односно $\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}$ може да ги прима сите свои n вредности. Вредностите x'_j зададени со (14') не се решенија на равенката (12) бидејќи во граничен случај, кога $p \to 0$, вредностите x'_j не се корени на равенката $x^n+q=0$ добиена од (12) за p=0. Затоа сите n корени на равенката (12) се зададени со (14). Притоа, ако $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{n}\right)^n}$ го промени знакот, тогаш повторно ги добиваме истите n корени на равенката (12).

Така на пример, ако n=2, тогаш равенката (12) гласи $x^2+p+q=0$ и, според (14), нејзиното решение е

$$x_{1,2} = \pm\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\right)^{1/2} - \frac{\frac{p}{2}}{\pm\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{2}\right)}\right)^{1/2}}.$$

Овие две решенија можат да се запишат и како

$$x_{1,2} = \pm\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\right)^{1/2} - \frac{\frac{p}{2}}{\pm\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\right)^{1/2}}.$$

Ако ги споредиме решенијата (11) и (14) гледаме дека тие се исти ако се стави

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{-p}{n}\right)^n}\right)^{1/n} - \frac{\frac{p}{n}}{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{-p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}} \tag{15}$$

па сега n може да биде кој било природен број.

Затоа досегашните резултати можеме да ги сумираме во следната теорема.

<u>Теорема</u>. Сите n корени на равенката

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \left(\frac{p}{n}\right)^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} x^{n-2k} + q = 0 \tag{16}$$

каде што $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{C}$ и $p \neq 0$, се зададени со (15), при што $\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{-p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}$ ги прима сите n вредности. Притоа, ако $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{-p}{n}\right)^n}$ го промени знакот, тогаш повторно се добиваат истите n корени на равенката (16).

<u>Забелешка</u>. Може да се смета дека (15) важи и во случај кога $p=0$ бидејќи од (15) следи дека $x \to \sqrt[n]{-q}$ кога $p \to 0$.

Да одбележиме дека, макар што разгледуваната класа од полиноми има два параметри p и q, всушност тоа е трипараметарска равенка по x' ако се стави $x=x'+\alpha$, каде што $\alpha \in \mathbb{R}$ е нов параметар.

На крај да уочиме дека се можни и други решенија на специјални равенки од n-ти ред, на пример користејќи ја формулата за $\operatorname{tg} nx$ изразена преку $\operatorname{tg} x$. Така, на пример, ако е дадена равенката која го има обликот

$$x^5 - \frac{5C}{\lambda}x^4 - \frac{10}{\lambda^2}x^3 + \frac{10C}{\lambda^3}x^2 + \frac{5}{\lambda^4}x - \frac{C}{\lambda^5} = 0 \tag{17}$$

за некои вредности на $C, \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, тогаш ставаме $x=y/\lambda$ па равенката ја запишуваме во облик

$$\frac{5y-10y^3+y^5}{1-10y^2+5y^4} = C.$$

Затоа, ставајќи $y=tg\theta$, се добива равенката

$$tg5\theta = C.$$

Оттука

$$x = \frac{1}{\lambda}y = \frac{1}{\lambda}tg\theta = \frac{-i}{\lambda}\left[\left(\frac{1+iC}{1-iC}\right)^{1/5} - 1\right]\Big/\left[\left(\frac{1+iC}{1-iC}\right)^{1/5} + 1\right]. \tag{18}$$

Притоа $\left(\frac{1+iC}{1-iC}\right)^{1/5}$ може да прима пет вредности, па со (18) се дадени сите пет корени на равенката (17).

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Обрешков, Н.: Висша Алгебра, Наука и изкуство, София, 1966.

[2] Kurepa, Đ.: Viša Algebra, kjiga druga, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1979.

GENERALIZATION OF THE CARDAN'S FORMULA

N. Fetah, K. Trenčevski

S u m m a r y

In this paper it is considered one class of polynomials of n-th degree which have all solutions in radicals. Namely, the following theorem is proved.

Theorem. All the roots of the polynomial

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \left(\frac{p}{n}\right)^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} x^{n-2k} + q = 0 \tag{1}$$

where $n \in \mathbb{N}$, $p,q \in \mathbb{C}$, $p \neq 0$, are given by

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{-p}{n}\right)^n}\right)^{1/n} - \frac{\frac{p}{n}}{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{-p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}}, \tag{2}$$

where $\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{-p}{n}\right)^n}\right)^{1/n}$ takes all n values. Moreover, if $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{-p}{n}\right)^n}$ changes its sign, then the same roots of (1) are obtained again.

Although the considered class of polynomials has two parameters p and q, in fact it is 3-parametric equation by x' if we put $x=x'+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, where α is a new parameter. In special case for n=3, we obtain the Cardan's formula.