ПРИЛОГ КОН ГЕОМЕТРИЈАТА НА ТРИАГОЛНИКОТ

ГОДИШЕН ЗБОРНИК НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ, Книга 2 (1949), 109-134

При изучувањето на геометриските фигури ние применуваме различни методи. Додека се геометриските методи неопределени, аналитичките се гломазни, така да се и поред својата потполност тешко употребливи. Предноста пак на тука употребената векторска метода е таа, што служејки се со простиот апарат на векторското сметање, со успех ги решава некои од особините на рамните фигури. Предмет на оваа работа е да покаже, како со векторскиот метод се добиваат некои веќе познати метрички релации при триаголник со директно решавање, без да се познаваат некои други особини и релации, кои би биле за геометрискиот метод неопходни.

Во првиот дел на оваа расправа изведуваме некои претходно познати формули потребни за понатамошните пресметувања.

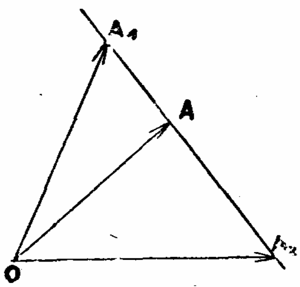
Во другиот дел ги изведуваме метричките релации со векторскиот метод. Во истата глава даваме и некои векторски релации за положајот на значајните точки во триаголникот во однос на неговите врвои.

Професорите А. Билимовиќ, Карамата и Т. Анѓелиќ ја прочитаа оваа работа и ми учинија корисни применби за које што сум им благодарен.

I

1. Положајот на една точка во рамнина ќе биде определен по однос на некоја стална точка-пол, со помошта на вектор. Така за точките A_1 и A_2 (сл. 1) по однос на O ги имаме векторите $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_1}$ што го определуваат положајот на тие точки. За определување на секоја друга точка A, што лежи на правата p, и ја дели во некој познат однос k отсечката A_1A_2, постапуваме по следниот начин:

$$\overrightarrow{A_1A} = k\overrightarrow{AA_2} \qquad (1)$$



Сл. 1

или

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_1} = k\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA}\right),$$

од каде што имаме

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + k\overrightarrow{OA_2}}{1+k}. \qquad (2)$$

На релациата (2) може да и се даде уште еден облик, ако се стави $k = m_1 : m_2$

$$\overrightarrow{OA} = \frac{m_2\overrightarrow{OA_1} + m_1\overrightarrow{OA_2}}{m_1+m_2} \qquad (2')$$

Равенката (1) ни претставува истовремено и услов за колинеарност на точките A, A_1 и A_2, кој што услов може да се напише и како

$$\overrightarrow{OA} = \lambda\, \overrightarrow{OA_1} + \mu\, \overrightarrow{OA_2}\,. \tag{2''}$$

Зимајќи го во предвид (2) имаме

$$\lambda = \frac{1}{1+k}, \quad \mu = \frac{k}{1+k}$$

или собирајќи ги

$$\lambda + \mu = 1\,.$$

λ и μ ни претставуваат произволни параметри, што ја задоволуваат релациата (3) имајќи ја во предвид (2) Обратно, може да се покаже оти (2″) претставува услов за колинеарност ако е исполнет условот (3)[1]).

Напоменуваме дека равенката (1) односно (2) ни претставува и равенка на права што мине низ A_1 и A_2.

2. Да ја напишеме косинусната теорема во векторски облик. Од триаголникот OA_1A_2 (сл. 1) имаме

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2}\,.$$

Дигајќи на квадрат, добиваме

$$\overrightarrow{OA_1}^2 + 2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_2}^2 = \overrightarrow{OA_2}^2\,. \tag{4}$$

3. Една точка P се наоѓа во рамнината на A, B, C ако постои релацијата

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1\,\overrightarrow{OA} + \alpha_2\,\overrightarrow{OB} + \alpha_3\,\overrightarrow{OC} \tag{5}$$

и кога е исполнет условот

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1\,. \tag{6}$$

Ставот го докажуваме со помошта на формулата[1])

$$\overrightarrow{OP}\left\{\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right)\right\} = \overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right) \tag{7}$$

што дава услов точката P да лежи на рамнината низ A, B и C.

Од (5) и (7) добиваме

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\,\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right)$$

што покажува дека е условот (6) неопходен. Дека е тој услов и доволен се уверуваме по следниот начин:

Од (5) и (6) имаме

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\,\overrightarrow{OP} = \alpha_1\,\overrightarrow{OA} + \alpha_2\,\overrightarrow{OB} + \alpha_3\,\overrightarrow{OC}$$

---

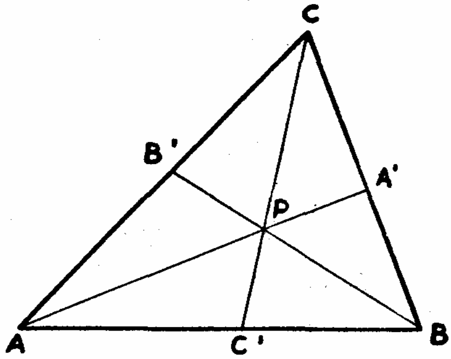
[1]) Да се види на пример:
J. Spielrein, *Vektorrechnung*, 2. Aufl., 1926, S. 63.

или

$$\alpha_1\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}\right)+\alpha_2\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\right)+\alpha_3\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\right)=0.$$

од каде следува дека трите вектори $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}$ се компланарни т. е. точката P лежи во рамнината на останатите три[1]).

Да видиме уште какви се значењата на скаларите α_1, α_2, α_3. Трите точки A, B и C нека ни бидат врвои на еден триаголник, а точката P произволна точка од рамнината на триаголникот. Од врвоите повлекуваме прави низ P што ги сечат спротивните страни соодветно во A', B', C' (сл. 2).



Сл. 2

Врз основа на (2″) и (3) добиваме за A, P и A'

$$\overrightarrow{OA'}=\lambda\,\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\,\overrightarrow{OP}$$

или согласно (5)

$$\overrightarrow{OA}=[\lambda+\alpha_1(1-\lambda)]\,\overrightarrow{OA}+\alpha_2(1-\lambda)\,\overrightarrow{OB}+\alpha_3(1-\lambda)\,\overrightarrow{OC}. \quad (8)$$

Но точката A' лежи и на $\overrightarrow{BC}$ па имаме

$$\overrightarrow{OA'}=\mu\,\overrightarrow{OB}+(1-\mu)\,\overrightarrow{OC}, \quad (9)$$

кое упоредено со (8) ни дава

$$\lambda=\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}, \qquad \mu=\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}, \qquad 1-\mu=\frac{\alpha_3}{1-\alpha_1}.$$

Со замена на овие вредности во (9) имаме

$$\overrightarrow{OA'}=\frac{\alpha_2\overrightarrow{OB}+\alpha_3\overrightarrow{OC}}{\alpha_2+\alpha_3}$$

или според (1) и (2′) го добиваме односот

[1]) Еден друг доказ на истиот став дава И. Ценов, *Свободни вектори. Сборник на Българската академия на науките и изкуствата*, книга XXXVIII—1. 1942, стр 22.

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \tag{10'}$$

По истиот начин

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\overrightarrow{C'B}}{\overrightarrow{AC'}} \tag{10''}$$

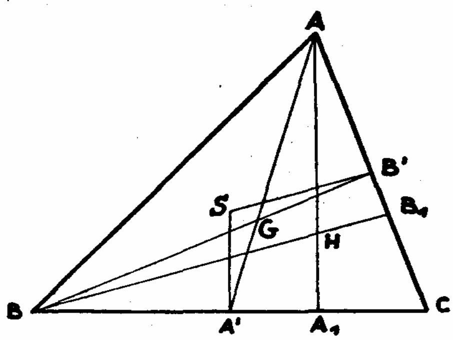
$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{\overrightarrow{B'A}}{\overrightarrow{CB'}} \tag{10'''}$$

Релациите (10'), (10'') и (10''') остануваат во сила и кога ќе ги замениме векторите со нивните интензитети.

4. Пресечните точки, на висините H, **на симетралите на страните** S **и на средните линии** G **се на една права и ја имаме релацијата**[1])

$$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GS}\,. \tag{11}$$

Го земаме триаголникот ABC и во него точките H, G и S (сл. 3).



Сл. 3

Тогаш имаме

$$\overrightarrow{GS} = \overrightarrow{A'G} + k_1\overrightarrow{HA} \tag{12}$$

и уште

$$\overrightarrow{GS} = \overrightarrow{B'G} + k_2\overrightarrow{HB}$$

од каде

$$\overrightarrow{A'G} - \overrightarrow{B'G} + k_1\overrightarrow{HA} - k_2\overrightarrow{HB} = 0\,.$$

Множејќи скаларно со $\overrightarrow{CA}$ добиваме

$$k_1 = \frac{\left(\overrightarrow{B'G} - \overrightarrow{A'G}\right)\cdot\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CA}}$$

---

[1]) B i e b e r b a c h, *Analytische Geometrie*, 2. Aufl., 1932, S. 53.

кое што заменето во (12) дава

$$\overrightarrow{GS}=\overrightarrow{A'G}+\frac{\left(\overrightarrow{B'G}-\overrightarrow{A'G}\right)\cdot\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{CA}}\cdot\overrightarrow{HA}. \tag{13}$$

По истиот начин ќе имаме

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AH} \tag{14}$$

и

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BH}$$

или по одземањето на овие две равенки и множењето со $\overrightarrow{CA}$ скаларно, добиваме

$$1=\frac{\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\right)\cdot\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CA}}. \tag{15}$$

Значи ние можеме да умножиме произволна величина со десната страна на (15), без да се промени нејзината вредност.

Така имаме за (14)

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GA}+\frac{\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\right)\cdot\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CA}}\cdot\overrightarrow{AH}. \tag{16}$$

Како е пак

$$\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{A'G} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{GB}=-2\overrightarrow{B'G},$$

од (13) и (16) ја имаме бараната релација (11).

II

5. Да ги определиме сега растојанијата на тежиштето до врвовите на еден триаголник и должините на тежишните линии. Земаме произволен триаголник (сл. 3) на кој што му се страните

$$\overrightarrow{AB}=\vec{c}, \quad \overrightarrow{BC}=\vec{a}, \quad \overrightarrow{CA}=\vec{b},$$

$$|\vec{a}|=a, \quad |\vec{b}|=b, \quad |\vec{c}|=c.$$

Координатите на средиштата на страните A', B', C' се дадени врз основа на (2) (за случај $k=1$), по однос на произволен пол[1]) O, со релациите

[1]) Точката O не е уцртана

$$\overrightarrow{OA'}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2},\qquad \overrightarrow{OB'}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{2},\qquad \overrightarrow{OC'}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}. \quad (*)$$

Точката G лежи на AA' па имаме

$$\overrightarrow{OG}=\frac{2\overrightarrow{OA}+k\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)}{2(1+k)}. \tag{17}$$

Но она лежи и на BB', па е

$$\overrightarrow{OG}=\frac{2\overrightarrow{OB}+\rho\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)}{2(1+\rho)}. \tag{18}$$

Пресекот на овие две прави дава

$$\rho=k=2,$$

кој што вредности заменети во (17) или (18) го даваат положајот од тежиштето на ABC

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}. \tag{19}$$

Дека и третата тежишна линија мине низ истата точка е очигледно од (19), оти таја не зависи од A', B', C'.

Релацијата (19) може направо да се добие и од (5), заменувајки во (6) вредностите

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{3}.$$

Акоземеме за пол еден од врвоите на триаголникот ABC, напр. $O\equiv A$, ќе имаме од (19)

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{\vec{c}-\vec{b}}{3} \tag{20'}$$

и аналогно

$$\overrightarrow{BG}=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{3}=\frac{\vec{a}-\vec{c}}{3}, \tag{20''}$$

$$\overrightarrow{CG}=\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{3}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{3}. \tag{20'''}$$

Дигајќи ги на квадрат (20'), (20'') и (20''') и земајќи ја во предвид формулата (4), ги добиваме растојанијата на тежиштето до врвоите на триаголникот

$$\overrightarrow{AG}^2=\frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2), \tag{21'}$$

$$\overrightarrow{BG}^2=\frac{1}{9}(2c^2+2a^2-b^2), \tag{21''}$$

$$\overrightarrow{CG}^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2), \qquad (21''')$$

кој што собрани даваат

$$\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{BG}^2 + \overrightarrow{CG}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (22)$$

Во овој случај (кога е $O \equiv A$) имаме од (*)

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

и врз основа на (20′)

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$$

или по дигањето на квадрат, добиваме за должината на тежишната линија

$$\overrightarrow{AA'}^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \qquad (23')$$

и аналогно

$$\overrightarrow{BB'}^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2) \qquad (23'')$$

$$\overrightarrow{CC'}^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2). \qquad (23''')$$

Papelier ги изведува[1]) истите формули со помош на векторскиот метод искористувајќи ја релацијата на Stewart.

6. Го земаме истиот триаголник и ги повлекуваме симетралите на страните. Со A', B', C' ги означуваме пресечните точки на симетралите со соодветните страни (сл. 3).

Од условот за нормалност помеѓу $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{SC'}$ следува

$$\overrightarrow{SC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

од каде имаме

$$\overline{SA}^2 = \overline{SC}^2 \qquad (24')$$

и по истиот начин за $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{SA'}$

$$\overline{SC}^2 = \overline{SB}^2. \qquad (24'')$$

За $\overrightarrow{SB'}$ ќе имаме врз основа на (2) (за случај $k = 1$)

$$\overrightarrow{SB'} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB'} = \frac{\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}}{2}.$$

[1]) G. Papelier, *Exercices de géométrie moderne*, t. I, 1947, p. 31

Множејќи ја скаларно со $\overrightarrow{CA}$ добиваме, имајки предвид $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}$

$$\overrightarrow{SB'} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\overline{SA}^2 - \overline{SC}^2\right) = 0. \tag{24'''}$$

Од (24′), (24″), (24‴) излегува дека се сечат сите три симетрали во една точка и дека е S на еднакво растојание од A, B и C.

Да го побараме растојанието на тежиштето G до пресекот на симетралите S.

Формулата (19) за $O \equiv S$ ни дава

$$3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}.$$

Страните на триаголникот пак се дадени со

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB},$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}.$$

Кога ќе ги подигнеме на квадрат и собериме задните четири равенки, добиваме[1])

$$9\overline{SG}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 3(\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2). \tag{25}$$

Како е пак

$$\overline{SA}^2 = \overline{SB}^2 = \overline{SC}^2 = R^2,$$

то имаме за бараното растојание

$$\overline{SG}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2). \tag{26}$$

Формулата (26) може и направо да се добие дигајќи ја на квадрат равенката

$$\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AG}$$

и зимајќи ја во предвид (20′), имаме

$$\overline{SG}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{AG}^2 + 2\overrightarrow{SA}\,\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}. \tag{27}$$

Како е од друга страна според (4)

$$2\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = -c^2, \tag{28'}$$

$$2\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} = -b^2, \tag{28''}$$

по замената во (27) добиваме (26). Вредноста за $\overline{AG}^2$ ја зимаме од (21′).

7. Во триаголникот ABC (сл. 3) подножјата на висините нека бидат A_1, B_1, C_1 а нивниот пресек H.

---

[1]) C. Laisant, *Introduction à la methode des quaternions*, 1881, p. 58

За да го определиме векторот на положајот, ќе се послужиме со релацијата (5). Најнапред да ги пресметаме вредностите на α_1, α_2, α_3.

Според формулата (4) имаме

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}.$$

Како е пак

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA_1}$$

ќе имаме

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA_1}. \tag{29}$$

По истиот начин ќе добиеме

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{A_1B}. \tag{30}$$

Од (29) и (30) добиваме соодветно

$$\overline{CA_1} = \frac{\overline{CB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{CB}}$$

и

$$\overline{A_1B} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{CB}}$$

или по разделување

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{\overline{CB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Но добиениот однос е точно односот (10′) па имаме

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2}. \tag{31′}$$

За односите (10″) и (10‴) ќе добиеме аналогно

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{b^2 + c^2 - a^2}, \tag{31″}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{c^2 + a^2 - b^2}. \tag{31‴}$$

Од задните три односа добиваме

$$\frac{\alpha_1}{\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}} = \frac{\alpha_2}{\frac{1}{a^2 + c^2 - b^2}} = \frac{\alpha_3}{\frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}} = \frac{1}{\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}}. \tag{32}$$

За (5) добиваме во овој случај

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\frac{\overrightarrow{OA}}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{\overrightarrow{OB}}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{\overrightarrow{OC}}{a^2 + b^2 - c^2}}{\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}}, \tag{33}$$

Ако се внесат место страните, соодветните агли, то врз основа на

$$\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{\alpha_3}{\alpha_2}$$

и аналогните два односа, имаме за (32)

$$\frac{\alpha_1}{\operatorname{tg} A}=\frac{\alpha_2}{\operatorname{tg} B}=\frac{\alpha_3}{\operatorname{tg} C}=\frac{1}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C} \tag{34}$$

а (33) добива вид[1])

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\overrightarrow{OA}\operatorname{tg} A+\overrightarrow{OB}\operatorname{tg} B+\overrightarrow{OC}\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}. \tag{35}$$

Ако за O земеме еден од врвоите на ABC ќе имаме од (33)

$$\overrightarrow{AH}=(b^2+c^2-a^2)\left[(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{AB}+(a^2+c^2-b^2)\overrightarrow{AC}\right]k \tag{36'}$$

и исто така

$$\overrightarrow{BH}=(c^2+a^2-b^2)\left[(b^2+c^2-a\ )\overrightarrow{BC}+(b^2+a^2-c^2)\overrightarrow{BA}\right]k \tag{36''}$$

$$\overrightarrow{CH}=(a^2+b^2-c^2)\left[(c^2+a^2-b^2)\overrightarrow{CA}+(c^2+b^2-a^2)\overrightarrow{CB}\right]k \tag{36'''}$$

каде k има вредност

$$\frac{1}{k}=(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)+(a^2+c^2-b^2)(c^2+b^2-a^2)+$$
$$+(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2).$$

Растојанието помеѓу пресекот на висините H и тежиштето G, како и од H до пресекот на симетралите на страните S ќе го најдеме со помошта на Ојлеровата релација (11). Дигајќи ја на квадрат и земајќи во превид (26) имаме

$$\overline{GH}^2=4R^2-\frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2) \tag{37}$$

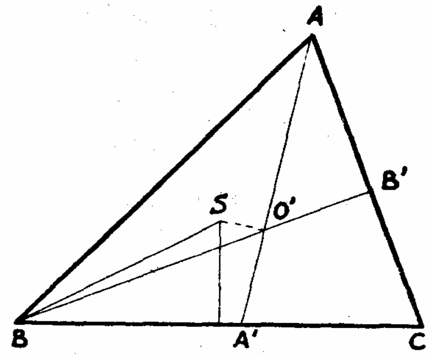
и

$$\overline{HS}^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2). \tag{38}$$

8. Сега во триаголникот ABC (сл. 4) нека ги повлечеме симетралите на аглите и пресечните точки со спротивните страни да ги означимн со A', B', C'. Да ги побараме растојанијата на O' до A, B, C.

---

[1]) И. Ценов. *Свободни вектори* (Сборник на Българската академия на наукитѣ и искуствата), кн. XXXVIII—1, 1942, стр. 34.



Сл 4

Ги зимаме уште значењата за страната од § 5.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{c}\right| = c; \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\vec{c}\right| = a; \qquad \left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\vec{b}\right| = b.$$

Врз основа на (2) ќе имаме

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB}}{1+k}. \tag{39}$$

Но векторот $\overrightarrow{AA'}$ лежи и на бисектрисата на аголот помеѓу $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$ па имаме

$$\overrightarrow{AA'} = n\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} - \frac{\overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|}\right). \tag{40}$$

k и n претставуваат произволни скалари.

Со изедначувањето на овие две вредности добиваме

$$\overrightarrow{AB}\left(\frac{k}{1+k} - \frac{n}{2c}\right) + \overrightarrow{CA}\left(\frac{n}{2b} - \frac{1}{1+k}\right) = 0.$$

Бидејки се пак $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$ линеарно независни имаме

$$k = \frac{b}{c}, \qquad n = \frac{2bc}{b+c}. \tag{41}$$

Со замена во (39) добиваме

$$\overrightarrow{AA} = \frac{b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{CA}}{b+c}, \tag{42'}$$

и аналогно

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{c\overrightarrow{BC} - a\overrightarrow{AB}}{c+a}, \tag{42''}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{a\overrightarrow{CA} - b\overrightarrow{BC}}{a+b}. \tag{42'''}$$

Точката O' ќе ја добиеме како пресек на симетралите $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$.

Ќе имаме

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO'} &= s_1\overrightarrow{AA'}\\ &= s_2\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{AB}.\end{aligned}\tag{43}$$

Земајќи во предвид (42') и $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$ добиваме

$$s_1=\frac{b+c}{a+b+c}, \qquad s_2=\frac{a+c}{a+b+c}.\tag{44}$$

Заменувајќи во (43) имаме

$$\overrightarrow{AO'}=\frac{b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{CA}}{a+b+c}.\tag{45'}$$

По истиот начин наоѓаме

$$\overrightarrow{BO'}=\frac{c\overrightarrow{BC}-a\overrightarrow{AB}}{a+b+c},\tag{45''}$$

$$\overrightarrow{CO'}=\frac{a\overrightarrow{CA}-b\overrightarrow{BC}}{a+b+c}.\tag{45'''}$$

Подигнати на квадрат $\overrightarrow{AO'}$, $\overrightarrow{BO'}$ и $\overrightarrow{CO'}$ ни ги даваат растојанијата на O' до врвоите A, B и C

$$\overline{AO'}^2=\frac{bc(p-a)}{p},\tag{46'}$$

$$\overline{BO'}^2=\frac{ca(p-b)}{p},\tag{46''}$$

$$\overline{CO'}^2=\frac{ab(p-c)}{p},\tag{46'''}$$

каде со p сме го означили скаларат $a+b+c$.

Собрани равенките (46) ни даваат

$$\overline{AO'}^2+\overline{BO'}^2+\overline{CO'}^2=ab+ac+bc-12Rr^{1)}\tag{47}$$

Растојанието на G до O' ќе го добиеме кога ќе ги земеме во предвид (25) (за случај $S\equiv O'$) и (46)

$$\overline{OG'}^2=\frac{1}{3}(ab+bc+ac)-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)\quad 4Rr.\tag{48}$$

---

[1]) R и r се скалари, чиј вредноси се $R=\frac{abc}{4P}$, $r=\frac{P}{p}$.

Векторот на положајат на O' по однос на произволна точка O ќе го добиеме врз основа на (5). Соодвените вредности на α_1, α_2, α_3 земајќи во предвид (10) и (41) се

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{a}{b}, \qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_3}=\frac{b}{c}, \qquad \frac{\alpha_3}{\alpha_1}=\frac{c}{a} \tag{49}$$

или

$$\frac{\alpha_1}{a}=\frac{\alpha_2}{b}=\frac{\alpha_3}{c}=\frac{1}{a+b+c}. \tag{50}$$

Тогаш ќе имаме[1])

$$\overrightarrow{OO'}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}. \tag{51}$$

Формулите (45) можат да бидат разгледани сега како специјални случаи на (51) кога за O земаме едноподруго A, B, C.

9. Ќе ја изведеме уште релацијата што ни дава растојание d помеѓу центарот на опишаниот и центарот на вписаниот круг.

Релацијата $\overrightarrow{SO'}=\overrightarrow{AO'}-\overrightarrow{AS}$ (сл. 4) по дигањето на квадрат нè доведува до

$$\overline{SO'}^2=\overline{AO'}^2+\overline{AS}^2-2\overrightarrow{AO'}\,\overrightarrow{AS}. \tag{52}$$

Земајќи ги во предвид формулите (45) и (28), имаме

$$-2\overrightarrow{AO'}\cdot\overrightarrow{AS}=\frac{2c}{a+b+c}\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CA}-\frac{2b}{a+b+c}\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=-\frac{bc(c+b)}{a+b+c}$$

и (52) дава[2]), по замената на $\overline{AO'}^2$ од (46')

$$\overline{SO}'^2=d^2=R^2-2Rr$$

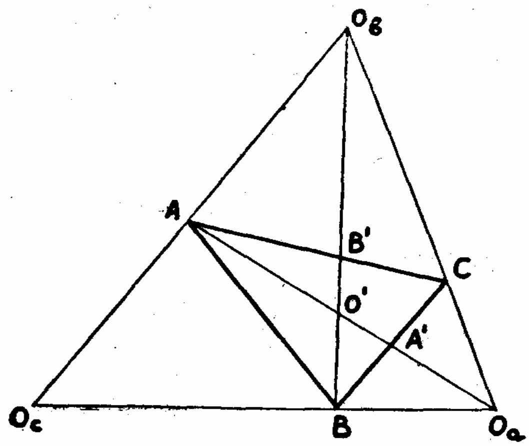
која што ја претставува бараната формула.

10. Ако во триаголникот ABC (сл. 5) ги повлечеме надворешните бисектриси на аглите и ги побараме нивните пресечни точки, ќе имаме согласно (40)

---

[1]) Burali–Forti e Marcolongo, *Elementi di Calcolo vettoriali*, seconda edizione, p. 53.

[2]) A. De Saint–Germain, *Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle*, 1926, p. 31 (овдека се изведува истата формула со помош на теоремите на Leibnitz и Lagrange за паралелни сили).



Сл. 5

$$\overrightarrow{AO_c} = r_1\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}\right) \tag{54}$$

и исто така

$$\overrightarrow{BO_c} = -r_2\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right). \tag{55}$$

Од триаголникот ABO_c имаме

$$r_1\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}\right) = \overrightarrow{AB} - r_2\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right).$$

Имајќи го во предвид $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$ добиваме

$$r_1 = \frac{bc}{a+b-c}, \qquad r_2 = \frac{ac}{a+b-c}, \tag{56}$$

така да (54) и (55) стануваат

$$\overrightarrow{AO_c} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{CA}}{a+b-c} \tag{57'}$$

$$\overrightarrow{BO_c} = -\frac{c\overrightarrow{BC} + a\overrightarrow{AB}}{a+b-c}. \tag{57''}$$

Од триаголникот пак ACO_c имаме и

$$\overrightarrow{CO_c} = \frac{a\overrightarrow{CA} - b\overrightarrow{BC}}{a+b-c}. \tag{57'''}$$

Споредувајќи ги формулите (57) со тие од (45), гледаме дека истите можат да се добиат од нив со замена на c со $-c$. Така можеме направо да пишеме имајќи предвид (51)

$$\overrightarrow{OO_c} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} - c\overrightarrow{OC}}{a+b-c} \tag{58}$$

кое лесно се проверува.

Дигајќи ги на квадрат $\overrightarrow{AO_c}$, $\overrightarrow{BO_c}$ и $\overrightarrow{CO_c}$, ги добиваме формулите што ни ги даваат растојанията на O_c (центарот на однадвор опишаниот круг) до врвоите A, B, C, т е.,

$$\overline{AO_c^2} = bc\frac{p-b}{p-c}, \tag{59'}$$

$$\overline{BO_c^2} = ac\frac{p-a}{p-c}, \tag{59''}$$

$$\overline{CO_c^2} = ab\frac{p}{p-c}. \tag{59'''}$$

Растојанието на O_c до G ќе го добиеме од (25) ($O_c \equiv S$). Земајќи ги во предвид (59) добиваме

$$\overline{O_cG}^2 = \frac{1}{3}(ab - bc - ac) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\frac{abc}{p-c}. \tag{60}$$

Една циклична пермутациа во формулите (57), (58), (59) и (60) ни дава аналогни формули за останалите два центра. Така за (60) имаме

$$\overline{O_aG}^2 = \frac{1}{3}(bc - ac - ab) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\frac{abc}{p-a} \tag{60'}$$

$$\overline{O_bG}^2 = \frac{1}{3}(ca - ab - bc) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\frac{abc}{p-b} \tag{60''}$$

Задиите три равенства собрани заедно со (48) ни даваат

$$\overline{O'G}^2 + \overline{O_aG}^2 + \overline{O_bG}^2 + \overline{O_cG}^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

или, зимајќи во предвид (26), ја имаме релацијата[1])

$$\overline{O'G}^2 + \overline{O_aG}^2 + \overline{O_bG}^2 + \overline{O_cG}^2 = 4\overline{SG}^2 + 12R^2. \tag{61}$$

11. Кога ќе ги помножиме (45''') со (57''') добиваме

$$\overrightarrow{CO_c} \cdot \overrightarrow{CO'} = ab \tag{62}$$

која што ни дава уште една врска помеѓу растојанијата на O' и O_c до врвоите.

Сега можеме да го најдеме и растојанието на O' до O_a O_b, O_c. Имено од

$$\overrightarrow{O'O_c} = \overrightarrow{CO_c} - \overrightarrow{CO'}$$

[1]) G. Dostor, *Distances du centre de gravité aux points remarquables du triangle* (Annales de mathématiques, 3e, série, t. II, 1883, p 270).

со дигање на квадрат и зимање во предвид формулата (62) имаме

$$\overline{O'O_c}^2 = \frac{abc^2}{p(p-c)} \tag{63'}$$

и аналогно

$$\overline{O'O_a}^2 = \frac{bca^2}{p(p-a)} \tag{63''}$$

$$\overline{O'O_b}^2 = \frac{cab^2}{p(p-b)} \tag{63'''}$$

на кој што збирот им дава

$$\overline{O'O_a}^2 + \overline{O'O_b}^2 + \overline{O'O_c}^2 = \frac{abc}{p}\left(\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}\right) \tag{64}$$

12. Растојанијата на S до O_a, O_b, O_c ќе ги најдеме од

$$\overrightarrow{SO_c} = \overrightarrow{AO_c} - \overrightarrow{AS}.$$

Дигајќи ги на квадрат левата и десната страна и земајќи ги во предвид (57), (59) и (28) имаме

$$\overline{SO_c}^2 = R^2 + \frac{abc}{2(p-c)} = R^2 + 2Rr_c \tag{65'}$$

и аналогно

$$\overline{SO_a}^2 = R^2 + 2Rr_a\,, \tag{65''}$$

$$\overline{SO_b}^2 = R^2 + 2Rr_b\,, \tag{65'''}$$

кои собрани заедно со (53) даваат

$$\overline{SO'}^2 + \overline{SO_a}^2 + \overline{SO_b}^2 + \overline{SO_c}^2 = 12R^2. \tag{66}$$

Напомена: По време на коректурата излезе книгата:
J. Карамата, *Комплексан број*, Београд, Научна књига, 1950.
На стр. 108 расправувани се некои прашања за кој станува збор во нашава расправа, и това користејќи ги комплексните броеви.

ПРИЛОЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ТРЕУГОЛНИКА

(*Вывод*)

Автор показывает преимущество векторной методы, употребляя ее для вывода некоторых известных метрических соотношений из геометрии плоскости.

CONTRIBUTION A LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(*Résumé*)

1. Le but de cette Note est de montrer avec quel avantage on peut appliquer la méthode vectorielle à certains problèmes de la géométrie du triangle. A cet effet nous partirons de la relation

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{OA} + \alpha_2 \overrightarrow{OB} + \alpha_3 \overrightarrow{OC} \tag{1}$$

en désignant par O l'origine, par P un point quelconque du plan du triangle ABC, et par α_1, α_2 et α_3 trois quantités scalaires, telles que

$$\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_3 = 1, \tag{2}$$

c. à d. les coordonnées triangulaires du point P par rapport au triangle de base ABC. Il est connu (voir S p i e l r e i n {1, p. 68}) que

$$\begin{aligned} \alpha_2 : \alpha_1 &= \overrightarrow{AC'} : \overrightarrow{C'B} \\ \alpha_3 : \alpha_2 &= \overrightarrow{BA'} : \overrightarrow{A'C} \\ \alpha_1 : \alpha_3 &= \overrightarrow{CB'} : \overrightarrow{B'A} \end{aligned} \tag{3}$$

où A', B' et C' désignent respectivement les points d'intersection de la droite AP avec le côté opposé BC, etc. (voir fig. 2).

2. En prenant pour P le centre de gravité G du triangle ABC, il s'ensuit, d'après (1), (2) et (3), que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3,$$

et

$$3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \tag{4}$$

c. à d. en déplaçant l'origine au point A,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

On en déduit, en tenant compte de

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

et en élevant au carré ces deux relations, que

$$\overline{AG}^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

ayant posé

$$a = |\overrightarrow{BC}|, \quad b = |\overrightarrow{CA}|, \quad c = |\overrightarrow{AB}|.$$

Par permutations circulaires, l'on en déduit les formules analogues pour $\overline{BG}^2$ et $\overline{CG}^2$, qui additionnées donnent

$$\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Etant donné que

$$2\,\overrightarrow{AA'} = 3\,\overrightarrow{AG},$$

il s'en suit que le carré de la médianne AA' est donné par

$$\overline{AA'}^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

3. En déplaçant l'origine O au centre S du cercle circonscrit au triangle ABC, on aura, d'après 4), que

$$3\,\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}.$$

En tenant compte des relations

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA},$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB},$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC},$$

puis en additionnant ces quatres dernières relations, après les avoir élévées au carré, l'on en déduit (voir Laisant {2, p. 50})

$$9\,\overline{SG}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 3\,(\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2), \qquad (5)$$

c. à d

$$\overline{SG}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2, \qquad (6)$$

où l'on a posé

$$|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SB}| = |\overrightarrow{SC}| = R.$$

4. En prenant dans les formules (1), (2), et 3, pour le point P l'orthocentre H du triangle ABC, étant donné que l'on a dans ce cas

$$\alpha_3 : \alpha_2 = (a^2 + c^2 - b^2) : (a^2 + b^2 - c^2),$$
$$\alpha_1 : \alpha_3 = (b^2 + a^2 - c^2) : (b^2 + c^2 - a^2),$$
$$\alpha_2 : \alpha_1 = (c^2 + b^2 - a^2) : (c^2 + a^2 - b^2),$$

c. à d

$$\alpha_1 : \frac{1}{b^2 + c^2 - a_2} = \alpha_2 : \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} = \alpha_3 : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} =$$

$$= 1 : \left(\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right),$$

il s'ensuit que

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{\overrightarrow{OA}}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{\overrightarrow{OB}}{a^2 + c^2 - b^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\overrightarrow{OC}}{a^2 + b^2 - c^2} \right) : \left(\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right).$$

En tenant compte des relations entre les côtés et les angles d'un triangle, on aura

$$\frac{\alpha_1}{\operatorname{tg} A} = \frac{\alpha_2}{\operatorname{tg} B} = \frac{\alpha_3}{\operatorname{tg} C} = \frac{1}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C},$$

et d'où l'on déduit que

$$OH = \frac{\overrightarrow{OA} \operatorname{tg} A + \overrightarrow{OB} \operatorname{tg} B + \overrightarrow{OC} \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

En deplaçant l'origine O au point A, il s'ensuit que

$$\overrightarrow{AH} = k\,(b^2 + c^2 - a^2\ \{(a^2 + b^2 - c^2)\,\overrightarrow{AB} + (a^2 + c^2 - b^2)\,\overrightarrow{AC}\},$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{k} = (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + c^2 - b^2)(c^2 + b^2 - a^2) + (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)$$

Par pertmutations circulaires l'on obtient les formules analogues pour $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CH}$.

Enfin, en tenant compte de la relation d'E u l e r

$$\overrightarrow{GH} = 2\,\overrightarrow{SG},$$

il s'ensuit, d'après (6), que

$$\overline{GH}^2 = 4\,R^2 - \frac{4}{9}\,(a^2+b^2\;\;c^2)$$

et

$$\overline{HS}^2 = 9\,R^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

5. Désignons par S le centre du cercle inscrit au triangle ABC. En remplaçant dans les formules (1), (2) et (3) P par S', étant donné que A' est dans ce cas le point d'intersection de la bissectrice de l'angle en A avec le côté opposé BC, on aura

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{AB} - c\,\overrightarrow{CA}}{b+c}$$

et

$$\frac{\alpha_1}{a} = \frac{\alpha_2}{b} = \frac{\alpha_3}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Il s'ensuit que (voir Burali-Forti e M a r c o l o n g o, p. 53)

$$\overrightarrow{OS'} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}}{a+b+c},$$

et, en particuleir, lorsqu'on deplace l'origine O au sommet A du triangle, que

$$\overrightarrow{AS'} = \frac{b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{CA}}{a+b+c}. \tag{7}$$

De cette dernière relation l'on en déduit que

$$\overline{AS'}^2 = \frac{bc\,(p-a)}{p} \tag{8}$$

où p désigne le demiperimètre du triangle ABC, et par permutations circulaires, l'on en déduit les relations correspondantes relatives à $\overline{BS'}^2$ et $\overline{CS'}^2$.

De la relation (5), en deplaçant S en S', en tenant compte de (8), l'on obtient pour la distance du centre S' du cercle inscrit au centre de gravité G la valeur

$$\overline{S'G}^2 = \frac{1}{3}\,(ab+bc+ac) - \frac{1}{9}\,(a^2+b^2+c^2) - R\,r. \tag{9}$$

Enfin, du fait que

$$\overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{AS'} - \overrightarrow{AS},$$

en élévant cette relation au carré, et en tennant compte de

$$2\,\overrightarrow{AS'} \cdot \overrightarrow{AS} = \frac{bc\,(b+c)}{a+b+c},$$

l'on obtient pour distance des centres du cercle inscrit et surconscrit la valeur

$$\overline{SS'}^2 = R\,(R-2r),$$

r étant le rayon du cercle inscrit.

6. En désignant par S_a, S_b, S_c les centres des cercles exinscrits opposés aux sommets A, B et C, l'on obtient par des considérations semblables les relations

$$\overrightarrow{OS_c}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}-c\overrightarrow{OC}}{a+b-c},$$

$$\overrightarrow{AS_c}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{CA}}{a+b-c} \tag{10}$$

et

$$\overline{AS_c}^2=bc\frac{p-b}{p-c},$$

ainsi que les formules analogues relatives aux centres S_a et S_b.

Les distances du centre de gravité aux centres S_a, S_a et S_c sont données par des formules analogues à la formule (9).

Enfin, en multipliant (7) et (10), l'on obtient

$$\overrightarrow{AS_c}\cdot\overrightarrow{AS'}=bc,$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de la relation

$$\overrightarrow{S'S_c}=\overrightarrow{CS_c}-\overrightarrow{CS'},$$

pour la distance des centres S' et S_c la valeur

$$\overline{S'S_c}^2=\frac{abc^2}{p(p-c)}.$$

Par permutations circulaires l'on obtient les valeurs correspondantes pour $\overline{S'S_a}^2$ et $\overline{S'S_b}^2$ qui additonnées donnent

$$\overline{S'S_a}^2+\overline{S'S_b}^2+\overline{S'S_c}^2=\frac{abc}{p}\left(\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}\right).$$

Index bibliographique

1. Spielrein, J. – Vektorrechnung, Stuttgart, 1926.

2. Laisant, C. – Introduction à méthode des quaternions, Paris, 1881.

3. Burali – Forti et Marcolongo. – Elementi di Calcolo Vettoriali, secondo edizione.